Ioan CAŞU Aurelian CERNEA Dan COMĂNESCU
Sorin COMŞA Gloria COSOVICI Emil POPESCU
Ileana TOMA

ECUAŢII DIFERENŢIALE ŞI CU DERIVATE PARŢIALE

Volumul 1

Ecuaţii diferenţiale ordinare cu aplicaţii în mecanică, fizică şi inginerie

Coordonarea volumului:
Ileana TOMA

Prefață

Cartea de față a fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2/S/32768, "Formarea cadrelor didactice universitare şi a studenților în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învățare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competențe performante şi practice pentru piața muncii".

Finanțat din Fondul Social European şi implementat de către Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului şi Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni şi Companii, Universitatea din Bucureşti, Universitatea Tehnică de Construcții din Bucureşti, Universitatea „Politehnica" din Bucureşti, Universitatea din Piteşti, Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi" din Iaşi, Universitatea de Vest din Timişoara, Universitatea „Dunărea de Jos" din Galați, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea "1 Decembrie 1918" din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operațional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane – POSDRU şi se înscrie în domeniul major de intervenție 1.2 Calitate în învățământul superior.

Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerințele pieței muncii şi crearea de mecanisme şi instrumente de extindere a oportunităților de învățare.

Evaluarea nevoilor educaționale obiective ale cadrelor didactice şi studenților legate de utilizarea matematicii în învățământul superior, masterate şi doctorate precum şi analizarea eficacității şi relevanței curriculelor actuale la nivel de performanță şi eficiență, în vederea dezvoltării de cunoştințe şi competențe pentru studenții care învață discipline matematice în universități, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea şi armonizarea curriculelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigențelor de pe piața muncii, elaborarea şi implementarea unui program de formare a cadrelor didactice şi a studenților interesați din universitățile

partenere, bazat pe dezvoltarea şi armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne şi funcționale pentru predarea-învățarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învățământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca raspuns materialul de față.

Formarea de competențe cheie de matematică şi informatică presupune crearea de abilități de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială şi inserție pe piața muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea şi sprijinirea elevilor şi studenților potențial talentați la matematică. Totuşi, studiul matematicii a evoluat în exigențe până a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învățare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă.

În acest context, analiza flexibilității curriculei, însoțită de analiza metodelor şi instrumentelor folosite pentru identificarea şi motivarea studenților talentați la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerințelor de masă, cât şi celor de elită.

Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societății în legătură cu rolul şi locul matematicii în educația de bază în instrucție şi în descoperirile ştiințifice menite să îmbunătățească calitatea vieții, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, şi nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmăreşte evidențierea a noi motivații solide pentru învățarea şi studiul matematicii la nivelele de bază şi la nivel de performanță; stimularea creativității şi formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise față de însuşirea aspectelor specifice din alte ştiințe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter şi multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată de matematică pentru viitorii studenți ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanță a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Am încercat să facem cât mai atractivă şi accesibilă prezentarea, simplificând expunerea fără a pierde din rigoarea matematică a rezultatelor.

Lucrarea este structurată în patru capitole, ultimul referindu-se la probleme de stabilitate clasică şi urmăreşte în principal subiectele prevăzute în programa actuală de studiu, cu precădere cele care pot servi la rezolvarea problemelor tipic inginereşti. Astfel, fiecare capitol se încheie cu un paragraf de aplicații în diverse domenii: mecanică, astronomie, hidrotehnică, statica construcțiilor, etc. Sunt modelate probleme concrete simple, folosind ecuații diferențiale ordinare. Prezentarea aplicațiilor este realizată în patru etape: problemă fizică, model matematic, determinarea soluției şi interpretarea ei fizică. Considerăm că numeroasele legături cu disciplinele inginereşti, legături pe care le-am pus în evidență prin aceste aplicații, fac cu atât mai convingător studiul ecuațiilor diferențiale ordinare pentru studenții din universitățile tehnice.

Paragrafele însoțite cu asterisc pot fi omise, ca şi o serie de demonstrații. Le-am introdus, totuşi, pentru unitatea şi logica expunerii. Menționăm că ele sunt, de fapt, destinate studenților celor mai interesați de domeniul ecuațiilor diferențiale şi care văd în viitoarea lor profesiune nu numai un mijloc de trai, dar şi o cheie a esenței fenomenelor naturii; ei caută cu perseverență “sâmburele” matematic care guvernează din abstract aceste fenomene, căci doar el asigură o viziune completă şi unitară asupra fenomenelor studiate şi, deci, prevederea şi stăpânirea acestora.

Conținutul teoretic al primelor trei capitole a fost realizat de prof. Ileana Toma şi conf. Emil Popescu, de la Universitatea Tehnică de Construcții din Bucureşti, iar cel al capitolului 4 – de conf. Aurelian Cernea de la Universitatea Bucureşti. Aplicațiile în mecanică şi fizică au fost realizate de conf. Dan Comănescu şi conf. Ioan Caşu de la Universitatea de Vest din Timişoara, precum şi de echipa Universității Politehnice din Cluj, formată din conf. Gloria Cosovici şi conf. Sorin Comşa. Aplicațiile în mecanica construcțiilor aparțin regretatului profesor M.V. Soare şi au fost publicate în cadrul

volumul "Ecuații diferențiale cu aplicații în mecanica construcțiilor", tradus în Springer (coautori: P.P.Teodorescu, Ileana Toma).

Bibliografia cuprinde şi link-uri cu site-uri pe care studenții pot consulta şi online manuale cuprinzând tematici de ecuații diferențiale ordinare.

Autorii

CUPRINS

CAPITOLUL 1

ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINARE DE ORDINUL ÎNTÂI

1.1. NOȚIUNI PRELIMINARE. EXEMPLE

Se ştie ce este aceea o ecuație algebrică. O *ecuație diferențială* este şi ea o egalitate, ce admite însă ca necunoscută o *funcție* şi mai cuprinde şi *derivatele* acesteia. Deosebim două posibilități: aplicații

- funcția necunoscută depinde de o singură variabilă şi atunci vom avea o ***ecuație diferențială ordinară*** (prescurtat **EDO**); Aplicații
- funcția necunoscută depinde de mai multe variabile, caz în care vom avea o ***ecuație cu derivate parțiale*** (prescurtat **EDP**).

Subiectele tratate în cadrul acestui curs aparțin cazului ***a)***.

Forma generală a unei ecuații diferențiale ordinare este, conform celor spuse anterior,

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,. \tag{1.1.1}$$

Definiția 1.1. Numim ***ordin*** al unei ecuații diferențiale ordinare ordinul maxim de derivare al funcției necunoscute *y*.

Una dintre problemele esențiale ale calculului diferențial este aceea de a determina derivata unei funcții date. Cea mai simplă problemă inversă aparține calculului integral:

PROBLEMĂ. *Dându-se o funcție $f = f(x)$ reală, de variabilă reală, să se determine primitiva sa.*

Dacă notăm primitiva lui *f* cu *y*, atunci formularea matematică a acestei probleme este:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x), \tag{1.1.2}$$

sau, echivalent

$$\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.1.3}$$

Relațiile de mai sus sunt, de fapt, cele mai simple ecuații diferențiale şi ştim cum să le rezolvăm. Într-adevăr, ştim că cea mai generală funcție *y* satisfăcând (1.1.2) sau (1.1.3) este

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C. \tag{1.1.4}$$

O primitivă arbitrară a lui *f* poate fi deci numită ***soluție*** a ecuației (1.1.2). Introdusă în (1.1.2), ea conduce la o identitate.

Deci şi în cazul ecuațiilor diferențiale, o ***soluție transformă ecuația într-o identitate***, exact ca în cazul ecuațiilor algebrice.

În expresia (1.1.4), semnul $\int$ desemnează una dintre ***primitivele*** lui *f*, iar *C* este o ***constantă arbitrară***. Deci funcția *y* nu este determinată în mod unic de ecuația (1.1.2) sau (1.1.3), astfel încât putem spune că ele admit o infinitate de soluții. Fiecare din aceste soluții se pot determina dând lui *C* diferite valori numerice.

Terminologie

- ♣ Soluția (1.1.4) a ecuației (1.1.2) se numeşte ***soluție generală***.
- ♣ Orice soluție obținută din soluția generală prin particularizarea constantei *C* se numeşte ***soluție particulară***.

♣ O soluție care nu se obține din cea generală prin particularizarea constantei arbitrare se numeşte ***soluție singulară***.

După toate aceste considerații, s-ar părea, la prima vedere, că ecuațiile diferențiale au apărut într-un cadru strict matematic, ca o completare logică formală a calculului diferențial.

Acest domeniu al matematicii îşi are însă originea istorică în mecanica newtoniană. Newton, inițiatorul calculului diferențial alături de Leibniz, a modelat cu o surprinzătoare intuiție o serie de fenomene fizice prin ecuații diferențiale. Astfel, faimoasa lege a II-a (a mecanicii), enunțată pe scurt:

"Rezultanta forțelor ce acționează asupra unui sistem este egală cu produsul dintre masa sistemului şi accelerația acestuia",

lege care, de altfel îi poartă şi numele, se exprimă matematic sub forma:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{1.1.5}$$

şi nu reprezintă altceva decât un ***sistem de ecuații diferențiale***. Într-adevăr, accelerația este derivata a doua a deplasării în raport cu timpul; această observație aparține unui alt titan al științei, Leonhard Euler.

Pentru edificare, să urmăm drumul propus de Newton în studiul unui caz foarte simplu.

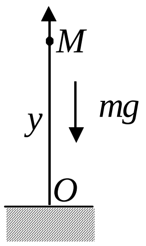
PROBLEMĂ. *Să se studieze mişcarea pe o axă verticală a unei particule (punct material) M, sub acțiunea propriei greutăți.*

Rezolvare. Construim mai întâi ***modelul matematic***. Trebuie deci să determinăm

a) funcția necunoscută (funcțiile necunoscute) a cărei cunoaştere înseamnă cunoaşterea fenomenului;

b) legea fizică (legile fizice) care guvernează fenomenul.

Presupunem că *Oy* este axa verticală de-a lungul căreia cade particula, originea fiind situată la suprafața pământului (vezi figura de mai jos).



Mişcarea particulei este cunoscută dacă se cunoaşte unica sa coordonată – anume, poziția sa y pe axa *Oy* – în fiecare moment t. ***Funcția necunoscută*** a problemei este deci $y = y(t)$, cu semnificația fizică de ***deplasare*** a particulei. În problemele de mişcare, ***legea a doua a lui Newton*** joacă un rol esențial. Aplicând-o pentru unica componentă a accelerației, găsim

$$ma = -mg, \tag{1.1.6}$$

m fiind masa particulei iar g – modulul accelerației gravitației. Semnul minus provine din faptul că axa *Oy* este dirijată în sus, iar forța de gravitație – în jos. Ținând seama că accelerația este derivata a doua a deplasării în raport cu timpul t şi simplificând cu m, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g. \tag{1.1.7}$$

Ecuația (1.1.7) reprezintă ***modelul matematic*** asociat mişcării studiate. Sensul ei matematic este următorul:

Cunoscându-se derivata a doua a funcției *y*, ***să se determine*** *y*.

Această cerință nu necesită în acest caz cunoştințe speciale. Luând succesiv de două ori primitiva ambilor membri ai ecuației (1.1.7), obținem, rând pe rând

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt + C_1, \\ &y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Ultima expresie constituie ***soluția generală*** a ecuației (1.1.7).

Observație. Soluția generală depinde în acest caz de două constante arbitrare, în timp ce în cazul ecuației (1.1.2) ea depindea doar de una.

IMPORTANT!

Întotdeauna soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale depinde de un număr de constante egal cu ordinul maxim de derivare al funcţiei necunoscute.

Vom reveni mai târziu cu justificări asupra acestui fapt semnificativ.

Să precizăm acum sensul fizic al constantelor C_1 şi C_2. Luând $t=0$ în prima expresie (1.1.8), găsim

$$C_1 = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0, \tag{1.1.9}$$

unde v_0 este viteza iniţială a particulei. Analog, din a doua expresie (1.1.8) deducem

$$C_2 = y(t)\big|_{t=0} = y_0, \tag{1.1.10}$$

care reprezintă poziţia iniţială a particulei.

Cu aceste noi notaţii pentru constante – notaţii sugestive prin semnificaţia lor fizică – soluţia generală a ecuaţiei (1.1.7) se pune sub forma

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0, \tag{1.1.11}$$

formă familiară cititorului încă din studiile liceale de fizică elementară.

Este clar acum care sunt datele suplimentare ce trebuie cunoscute pentru a determina acea soluţie care corespunde unei anumite mişcări, bine precizată:

- ♣ ***poziţia iniţială*** y_0 a particulei şi
- ♣ ***viteza*** sa ***iniţială*** v_0.

Se poate deci spune că y satisface condiţiile

$$\begin{aligned} &y(0) = y_0, \\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = v_0. \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Acestea se mai numesc şi ***condiţii iniţiale*** sau ***condiţii Cauchy***.

Problema care constă în rezolvarea ecuației (1.1.7) astfel încât y să satisfacă condițiile inițiale (1.1.12) se numeşte ***problemă Cauchy*** sau ***problemă inițială***.

IMPORTANT!

În cazul problemei Cauchy, condițiile sunt puse în acelaşi punct!

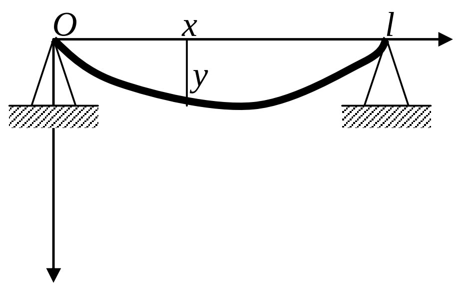
(În exemplul de mai sus, în punctul $t = 0$).

Există însă situații în care acest tip de condiții nu corespund fenomenului fizic. Să luăm cazul unei bare simplu rezemate (vezi figura de mai jos).

Problema constă în determinarea deflexiei (încovoierii) y ca funcție de x. Nu vom intra în detalii de stabilire a modelului matematic asociat. Precizăm doar că acesta se prezintă sub forma ecuației diferențiale ordinare

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x)\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}, \tag{1.1.13}$$

numită şi ***ecuația Bernoulli-Euler***.



Din figură se vede că la capetele 0 şi l ale barei deplasarea trebuie să fie nulă, adică

$$y(0) = 0, \qquad y(l) = 0. \tag{1.1.14}$$

Condițiile suplimentare (1.1.14) se mai numesc şi ***condiții bilocale***.

Problema care constă în rezolvarea ecuației (1.1.13) cu condițiile (1.1.14) este o ***problemă bilocală*** sau ***problemă Picard*** (engl.: *two-point problem*).

Aceste două tipuri de probleme asociate EDO sunt tipice şi acoperă o mare parte din problemele mecanice şi fizice importante.

Din cele expuse mai sus se desprinde concluzia că nu se poate face un studiu sistematic de fenomen fizic fără a se recurge la modelul său diferențial.

După rezolvarea EDO (sau EDP) corespunzătoare, interpretarea soluției va permite cunoaşterea efectivă, previziunea şi deci controlul fenomenului studiat, iar acestea sunt deziderate majore ale ştiinței.

1.2. FORMELE SUB CARE SE PREZINTĂ ECUAȚIILE DE ORDINUL I ŞI SOLUȚIILE LOR

Este evident faptul că o ecuație diferențială ordinară poate funcționa doar în punctele în care este definită. De exemplu, ecuația

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \tag{1.2.1}$$

are sens doar pentru $|y| \le 1$. Fiind dată o ecuație diferențială ordinară, trebuie determinat mai întâi domeniul pe care aceasta are sens; domeniul de definiție al unei ecuații diferențiale ordinare este cel al funcțiilor care o definesc.

1.2.1. FORME ALE ECUAȚIILOR DE ORDINUL I

A. ***Forma generală*** a ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul I este, conform definiției 1.1 şi relației (1.1.1),

$$F(x, y, y') = 0, \qquad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \tag{1.2.2}$$

unde F este definit – şi, de obicei, continuu – în raport cu variabila independentă x, precum şi în raport cu funcția necunoscută y şi cu derivata acesteia, y'.

Forma generală se mai numeşte şi ***implicită***, deoarece îl conține implicit pe y'.

B. Dacă $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, atunci, conform teoremei funcțiilor implicite (vezi cursul de Analiză Matematică, partea I), y' poate fi explicitat din (1.2.2) şi obținem ***forma canonică*** a ecuațiilor diferențiale ordinare de ordinul I:

$$y' = f(x, y), \tag{1.2.3}$$

formă care se mai numeşte şi ***explicită***.

C. Dacă $f(x, y) \neq 0$, atunci (1.2.3) se mai poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{1.2.4}$$

numită şi ***forma inversă***, formă care poate fi folosită în vecinătatea acelor puncte $(x, y) \in \Re^2$ în care $f(x, y)$ tinde la infinit. Evident, dacă f nu tinde la infinit, formele (1.2.3) şi (1.2.4) sunt echivalente.

D. Ecuația (1.2.3) mai poate fi scrisă şi sub ***forma diferențială***:

$$\mathrm{d}y = f(x, y)\mathrm{d}x, \tag{1.2.5}$$

de asemenea echivalentă cu (1.2.3), (1.2.4). ***Forma diferențială*** mai generală

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0, \tag{1.2.6}$$

este şi ea echivalentă cu fiecare dintre ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \tag{1.2.7}$$

ATENȚIE!

În punctele (x_0, y_0) în care P şi Q se anulează, nici una dintre ecuațiile (1.2.6), (1.2.7) ***nu este definită.***

Ca şi în cazul ecuației (1.2.2), funcțiile P şi Q sunt de cele mai multe ori continue pe domeniul de definiție al ecuației.

E. Forma simetrică a EDO de ordinul I este

$$\frac{\mathrm{d}x}{X(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{Y(x,y)}. \tag{1.2.8}$$

Fiecare din formele de mai sus pune în evidență anumite caracteristici şi posibilități de rezolvare ale ecuațiilor de ordinul I. Cel mai des întâlnite sunt formele (1.2.2), (1.2.3) şi (1.2.6).

1.2.2. FORME ALE SOLUȚIILOR

Definiția 1.2. O ***soluție a ecuației diferențiale*** (1.2.3) în intervalul real $[a,b]$ este o funcție $y = y(x)$ de clasă $\mathrm{C}^1([a,b])$ care satisface identic (1.2.3), adică

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad x \in [a,b]. \tag{1.2.9}$$

Dacă există o constantă c astfel încât $f(x,c) = 0$ pentru orice $x \in [a,b]$, rezultă, evident, că $y = c$ este soluție a lui (1.2.3). Ea se numeşte ***soluție staționară*** şi este deosebit de importantă pentru studiul calitativ al ecuației.

Pentru a rezolva o ecuație diferențială de ordinul I se folosesc, după caz, formele menționate în paragraful precedent şi, în funcție de acestea, vom obține şi soluțiile lor sub diferite forme.

Soluțiile unei EDO de ordinul I pot fi determinate

a. sub ***formă explicită***: $y = y(x), \qquad x \in [a,b]$;

b. sub ***formă implicită***: $\Phi(x,y) = 0$;

c. sub ***formă parametrică***: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b] \subseteq \Re$.

Exemplu. Funcția

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in (-1,1), \tag{1.2.10}$$

este ***soluție explicită*** a ecuației

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{1.2.11}$$

VERIFICARE. Într-adevăr, pe de o parte

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1.2.12}$$

iar pe de altă parte,

$$-\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.2.13}$$

Expresiile (1.2.12) şi (1.2.13) coincid.

Soluția (1.2.10) poate fi exprimată şi ***implicit***:

$$\Phi(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{1.2.14}$$

VERIFICARE. Într-adevăr, calculând diferențiala lui Φ, găsim

$$\mathrm{d}\Phi(x, y) = \mathrm{d}\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0. \tag{1.2.15}$$

Din ultima egalitate deducem

$$y' + \frac{x}{y} = 0, \tag{1.2.16}$$

adică tocmai (1.2.11).

Soluția (1.2.10) mai poate fi exprimată şi ***parametric***:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t > 0. \tag{1.2.17}$$

VERIFICARE. Putem scrie ecuația (1.2.11) şi sub forma diferențială

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0. \tag{1.2.18}$$

Avem

$$\left.\begin{array}{l} x\mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}(\cos t) = \cos t \cdot (-\sin t\mathrm{d}t) = -\sin t \cos t\mathrm{d}t \\ \underline{y\mathrm{d}y = \sin t \cdot \mathrm{d}(\sin t) = \sin t \cdot (\cos t\mathrm{d}t) = \sin t \cos t\mathrm{d}t} \end{array}\right| + \tag{1.2.19}$$

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = (-\sin t \cos t + \sin t \cos t)\mathrm{d}t,$$

de unde rezultă $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$, adică tocmai (1.2.16).

1.3. TIPURI DE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL I REZOLVABILE PRIN CUADRATURI

Există anumite ecuații de formă particulară, des întâlnite în aplicații, pentru care s-au găsit metode de rezolvare cu ajutorul cărora soluția se exprimă folosind primitive ale unor funcții. Spunem, în acest caz, că *ecuația se rezolvă prin cuadraturi* (integrări).

Vom aminti şi rezolva aici câteva asemenea tipuri de ecuații diferențiale ordinare.

1.3.1. ECUAȚII CU VARIABILE SEPARATE

Sunt de forma

$$X(x)\mathrm{d}x + Y(y)\mathrm{d}y = 0, \tag{1.3.1}$$

unde X şi Y sunt funcții continue, depinzând de variabilele x, respectiv y.

MOD DE REZOLVARE

Observăm că funcția

$$F(x, y) = \int X(x)\mathrm{d}x + \int Y(y)\mathrm{d}y, \tag{1.3.2}$$

admite ca diferențială membrul stâng al ecuației (1.3.1). Într-adevăr,

$$\mathrm{d}F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y = X(x)\mathrm{d}x + Y(y)\mathrm{d}y. \tag{1.3.3}$$

Rezultă deci $\mathrm{d}F(x, y) = 0$, astfel încât $F(x, y) = C$. Prin urmare, soluția generală a EDO (1.3.1) este

$$\int X(x)\mathrm{d}x + \int Y(y)\mathrm{d}y = C\,. \tag{1.3.4}$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{X(x)}\mathrm{d}x + \underbrace{\frac{1}{y}}_{Y(y)}\,\mathrm{d}y = 0\,. \tag{1.3.5}$$

Rezolvare. Este, evident o ecuație cu variabile separate. Calculând primitivele, găsim

$$\begin{aligned}&\int X(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x},\\ &\int Y(y)\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \ln|y|,\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

deci soluția generală a EDO (1.3.5) este

$$\boxed{-\,\mathrm{e}^{-x} + \ln|y| = C}\,. \tag{1.3.7}$$

1.3.2. ECUAȚII CU VARIABILE SEPARABILE

Acestea au forma

$$P(x)q(y)\mathrm{d}x + Q(y)p(x)\mathrm{d}y = 0\,, \tag{1.3.8}$$

unde P, p, Q, q sunt funcții continue în raport cu argumentele corespunzătoare.

MOD DE REZOLVARE

Dacă $\mu(x, y) \equiv p(x)q(y) \neq 0$ pe domeniul de definiție al ecuației, împărțim cu μ şi obținem

$$\frac{P(x)}{p(x)}\mathrm{d}x + \frac{Q(y)}{q(y)}\mathrm{d}y = 0\,, \tag{1.3.9}$$

care este o ***ecuație cu variabile separate***. Conform cazului precedent, soluția generală a ecuației (1.3.8) este

$$\int \frac{P(x)}{p(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{Q(y)}{q(y)}\mathrm{d}y = C\,. \qquad (1.3.10)$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$2x\sqrt{y}\mathrm{d}x + \left(1 - x^2\right)\mathrm{d}y = 0\,. \qquad (1.3.11)$$

Rezolvare. Este o EDO cu variabile separabile. Împărțim cu $\mu = \left(1 - x^2\right)\sqrt{y}$ şi, după simplificări, obținem

$$\frac{2x}{1 - x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = 0\,. \qquad (1.3.12)$$

Aceasta este o ecuație cu variabile separate, deci soluția generală este dată de

$$\int \frac{2x}{1 - x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = C\,, \qquad (1.3.13)$$

sau, calculând primitivele,

$$-\ln\left|1 - x^2\right| + 2\sqrt{y} = C\,, \qquad (1.3.14)$$

valabilă pentru $1 - x^2 \neq 0, \quad y > 0$.

I.3.3. ECUAȚII DIFERENȚIALE OMOGENE, DE GRADUL m

Definiția 1.3. O funcție $f = f(x, y),\ f : \Re^2 \to \Re$, se numeşte ***omogenă de gradul m*** dacă:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y),\ \forall t \in \Re\,. \qquad (1.3.15)$$

Dacă egalitatea are loc doar pentru $t > 0$, f se numeşte ***pozitiv omogenă***.

O ecuație omogenă de ordinul I are forma

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0\,, \qquad (1.3.16)$$

unde P şi Q sunt omogene de acelaşi grad m.

MOD DE REZOLVARE

Facem schimbarea

$$y = x\mathrm{z} \to \mathrm{d}y = x\mathrm{dz} + \mathrm{z}\mathrm{d}x. \tag{1.3.17}$$

Introducând în ecuație, rezultă

$$P(x, x\mathrm{z})\mathrm{d}x + Q(x, x\mathrm{z})(x\mathrm{dz} + \mathrm{z}\mathrm{d}x) = 0. \tag{1.3.18}$$

Dar P, Q sunt omogene de gradul m, deci

$$P(x, x\mathrm{z}) = x^m P(1, z), \;\; Q(x, x\mathrm{z}) = x^m Q(1, z). \tag{1.3.19}$$

Rezultă

$$x^m \left[P(1, z)\mathrm{d}x + Q(1, z)(x\mathrm{dz} + \mathrm{z}\mathrm{d}x)\right] = 0. \tag{1.3.20}$$

Mai departe,

$$\left[P(1, z) + zQ(1, z)\right]\mathrm{d}x + xQ(1, z)\mathrm{dz} = 0. \tag{1.3.21}$$

Aceasta este o ***ecuație cu variabile separabile***. Împărțim cu $x\left(P(1, z) + zQ(1, z)\right)$ şi deducem

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{Q(1, z)}{P(1, z) + zQ(1, z)}\mathrm{dz} = 0, \tag{1.3.22}$$

deci soluția generală a ecuației (1.3.21) este, conform celor spuse mai sus,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{Q(1, z)}{P(1, z) + zQ(1, z)}\mathrm{dz} = C. \tag{1.3.23}$$

Făcând notația

$$\varphi(z) = \int \frac{Q(1, z)}{P(1, z) + zQ(1, z)}\mathrm{dz}, \tag{1.3.24}$$

soluția generală a ecuației se scrie astfel

$$\ln|x| + \varphi(z) = C, \tag{1.3.25}$$

sau, trecând la exponențială,

$$x = C\mathrm{e}^{-\varphi(z)}. \tag{1.3.26}$$

Revenind la variabila inițială, obținem soluția generală a EDO omogene (1.3.16) sub forma

$$x = C\mathrm{e}^{-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{1.3.27}$$

Exemplu. Să se determine soluția generală pentru următoarea EDO omogenă:

$$\left(xy + y^2\right)dx - \left(2x^2 + xy\right)dy = 0. \tag{1.3.28}$$

Rezolvare. Avem $P(x,y) = xy + y^2$, iar $Q(x,y) = -\left(2x^2 + xy\right)$.

Evident, această ecuație nu este nici cu variabile separate, nici separabile. Să încercăm să verificăm dacă este omogenă, conform definiției 1.3:

$$\begin{gathered} P(xt, yt) = t^2xy + t^2y^2 = t^2\left(xy + y^2\right) = t^2P(x,y), \\ Q(tx,ty) = -\left(2t^2x^2 + t^2xy\right) = -t^2\left(2x^2 + xy\right) = t^2Q(x,y). \end{gathered} \tag{1.3.29}$$

Deci ecuația este *omogenă de gradul* 2.

Pentru rezolvare, efectuăm schimbarea

$$y = xz \rightarrow \mathrm{d}y = x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x. \tag{1.3.30}$$

Rezultă succesiv

$$\begin{gathered} \left(x^2z + x^2z^2\right)\mathrm{d}x - \left(2x^2 + x^2z\right)(x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x) = 0, \\ x^2\left[\left(z + z^2\right)\mathrm{d}x - (2+z)(x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x)\right] = 0, \\ \left[\left(z + z^2\right) - 2z - z^2\right]\mathrm{d}x - (2+z)x\mathrm{d}z = 0; \end{gathered}$$

în final, obținem

$$z\mathrm{d}x + (2+z)x\mathrm{d}z = 0, \tag{1.3.31}$$

care este o *ecuație cu variabile separabile*.

Împărțind cu *xz*, găsim

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{2+z}{z}\mathrm{d}z=0, \qquad (1.3.32)$$

care este o *ecuație cu variabile separate*.

Soluția sa generală este

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\left(1+\frac{2}{z}\right)\mathrm{d}z=C,$$

sau

$$\ln|x|+z+2\ln|z|=C.$$

Revenind la vechile variabile, avem

$$\ln|x|+\frac{y}{x}+2\ln\left|\frac{y}{x}\right|=C.$$

Trecând la exponențială, rezultă soluția generală a ecuației omogene (1.3.28)

$$x\cdot\frac{y^2}{x^2}\cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=C, \qquad (1.3.33)$$

sau, altfel scris

$$\boxed{y^2=Cx\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}}. \qquad (1.3.34)$$

1.3.4. ECUAȚII CU DIFERENȚIALE TOTALE EXACTE

Sunt de forma

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0. \qquad (1.3.35)$$

Definiția 1.4. O ecuație diferențială ordinară de ordinul I se numeşte ***ecuație cu diferențiale totale exacte*** dacă există o funcție diferențiabilă $F=F(x,y)$ astfel încât $\mathrm{d}F\equiv P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$.

Din Cursul de Analiză Matematică, partea I-a, se ştie că:

$\mathrm{d}F \equiv P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ ***dacă şi numai dacă***

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.3.36}$$

CONSECINȚĂ:

Soluția generală a unei ecuații cu diferențiale totale exacte este

$$F(x, y) = C, \tag{1.3.37}$$

unde** C **este o constantă arbitrară.

Deci rezolvarea unei ecuații cu diferențiale totale exacte se reduce la determinarea unei funcții de două variabile, atunci când i se cunoaşte diferențiala.

MOD DE REZOLVARE

- **Etapa 1**. Se calculează derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$; dacă ele coincid, rezultă că ecuația este cu diferențiale totale exacte, adică există *F* astfel încât

$$\mathrm{d}F \equiv P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y.$$

- **Etapa 2**. Deoarece diferențiala unei funcții este (vezi Cursul de Analiză, partea I)

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y, \tag{1.3.38}$$

rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q. \end{cases} \tag{1.3.39}$$

Integrând prima relație în raport cu *x*, se obține forma lui *F*:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\mathrm{d}t + \varphi(y), \tag{1.3.40}$$

unde φ este o funcție arbitrară depinzând doar de *y*.

Derivând ambii membri ai acestei relații în raport cu *y*, vom avea

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}(t,y)\mathrm{d}t+\varphi'(y), \tag{1.3.41}$$

unde x_0 este fixat, dar arbitrar ales, astfel încât (x_0,y) să aparțină domeniului pe care sunt definiți *P* şi *Q*.

Ținând acum seama de condiția (1.3.36), deducem

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)\mathrm{d}t+\varphi'(y)=Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y). \tag{1.3.42}$$

Comparând această relație cu expresia lui $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ din (1.3.39), rezultă

$$Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y)=Q(x,y), \tag{1.3.43}$$

de unde

$$\varphi'(y)=Q(x_0,y), \tag{1.3.44}$$

şi deci expresia lui φ este

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)\mathrm{d}t, \tag{1.3.45}$$

y_0 fiind ales în aceleaşi condiții ca x_0.

În final, găsim pentru *F*

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)\mathrm{d}t, \tag{1.3.46}$$

astfel încât ***soluția generală a ecuației cu diferențiale totale exacte*** se obține sub forma

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} P(t,y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\mathrm{d}t = C}, \tag{1.3.47}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Dacă integrăm mai întâi a doua relație (1.3.39) în raport cu *y*, obținem soluția generală sub forma echivalentă cu (1.3.47)

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\mathrm{d}t = C}. \tag{1.3.48}$$

Exemplu. Să se determine soluția generală pentru ecuația

$$y\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + \left(y + \mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.3.49}$$

Rezolvare.

I. ***Verificăm dacă este satisfăcută condiția*** (1.3.36)**.** Avem

$$\begin{cases} P(x,y) = y\mathrm{e}^{x}, \\ Q(x,y) = y + \mathrm{e}^{x}, \end{cases}$$

deci

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \mathrm{e}^{x}, \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}, \end{cases}$$

şi rezultă că ***ecuația este cu diferențiale totale exacte.***

II. Aceasta înseamnă că ***există*** F ***de clasă*** C^1 ***astfel încât***

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y\mathrm{e}^{x}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = y + \mathrm{e}^{x}. \end{cases} \tag{1.3.50}$$

Din prima relație (1.3.50) deducem

$$F(x,y) = y\mathrm{e}^x + \varphi(y), \tag{1.3.51}$$

de unde

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^x + \varphi'(y). \tag{1.3.52}$$

Egalând această expresie cu cea din (1.3.50), rezultă

$$\mathrm{e}^x + \varphi'(y) = \mathrm{e}^x + y, \tag{1.3.53}$$

de unde

$$\varphi'(y) = y \;\; \rightarrow \;\; \varphi(y) = \frac{y^2}{2}. \tag{1.3.54}$$

Înlocuind această expresie în (1.3.51), obținem ***soluția generală a ecuației*** (1.3.49):

$$\boxed{y\mathrm{e}^x + \frac{y^2}{2} = C}. \tag{1.3.55}$$

Observații. Acelaşi rezultat se obține prin aplicarea directă a formulelor generale de mai sus.

a) Aplicăm formula (1.3.47), în care se poate lua $x_0 = 0,\ y_0 = 0$.

Obținem

$$F(x,y) = \int_0^x P(t,y)\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x_0,t)\mathrm{d}t = \int_0^x y\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \int_0^y \left(t + \mathrm{e}^0\right)\mathrm{d}t =$$

$$= y\mathrm{e}^t\Big|_{t=0}^{t=x} + \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=y} = y\mathrm{e}^x - y + \frac{y^2}{2} + y,$$

prin urmare soluția generală a ecuației este tot

$$\boxed{y\mathrm{e}^x + \frac{y^2}{2} = C},$$

cu C constantă arbitrară.

b) Aplicăm acum formula (1.3.48); şi aici se poate lua $x_0 = 0,\ y_0 = 0$. Obținem

$$F(x,y) = \int_0^x P(t, y_0)\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^x 0 \cdot \mathrm{e}^t \mathrm{d}t + \int_0^y \left(t + \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}t = \left(t\mathrm{e}^x + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=y},$$

prin urmare soluția generală a ecuației este aceeaşi

$$\boxed{y\mathrm{e}^x + \frac{y^2}{2} = C},$$

cu C constantă arbitrară.

1.3.5. FACTOR INTEGRANT

Deoarece modul de rezolvare al unei ecuații cu diferențiale totale exacte este extrem de simplu, s-au căutat căi pentru a exploata şi în alte situații această idee extrem de atrăgătoare.

Fie ecuația

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0. \qquad (1.3.56)$$

Ne putem pune următoarea

PROBLEMĂ. *Dacă ecuația (1.3.56) nu este cu diferențiale totale exacte, am putea oare găsi o funcție* $\mu = \mu(x,y)$*, cu care, înmulțind-o, s-o transformăm într-o ecuație cu diferențiale totale exacte?*

Funcția $\mu(x,y)$ se numeşte ***factor integrant***.

Putem demonstra cu uşurință că:

1. Există întotdeauna un factor integrant.
2. O ecuație diferențială ordinară de ordinul I admite o infinitate de factori integranți.

3. Orice factor integrant al unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul I este de forma $\varphi(U)\mu(x,y)$, unde $U(x,y)=C$ este o integrală (sau, altfel spus, o soluție) a ecuației, iar $\mu(x,y)$ este un factor integrant.
4. Dacă se cunosc doi factori integranți ai unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul I, atunci soluția acesteia se scrie fără cuadraturi.

CUM DETERMINĂM FACTORUL INTEGRANT?

Presupunem problema rezolvată; am înmulțit deci ecuația (1.3.56) cu o funcție $\mu=\mu(x,y)$, obținând

$$(\mu P)\,dx+(\mu Q)\,dy=0\,, \tag{1.3.57}$$

care este o ecuație cu diferențiale totale exacte. Conform proprietăților diferențialei (vezi Cursul de Analiză, partea I), există $F=F(x,y)$, de clasă C^1 astfel încât

$$dF(x,y)\equiv(\mu P)dx+(\mu Q)dy\,, \tag{1.3.58}$$

ceea ce implică

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\mu P,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\mu Q\,. \tag{1.3.59}$$

Dacă F este de clasă C^2, atunci, evident,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)\,, \tag{1.3.60}$$

deoarece derivatele sale mixte coincid, conform teoremei Schwartz (vezi Cursul de Analiză, partea I)

Derivând cele două produse, obținem

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}\,, \tag{1.3.61}$$

care este, de fapt, o ecuație cu derivate parțiale, pe care trebuie s-o satisfacă factorul integrant μ; am ajuns deci la o problemă aparent mai complicată decât cea de la care am plecat.

Presupunem acum că $\mu = \mu(\omega)$, unde $\omega = \omega(x, y)$ este o funcție cunoscută ce depinde de x şi y. Deoarece μ depinde de x şi y doar prin intermediul lui ω, aplicăm regula derivării în lanț:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}. \tag{1.3.62}$$

Introducem aceste expresii în (1.3.61) şi obținem

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\left(P\frac{\partial \omega}{\partial y} - Q\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), \tag{1.3.63}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} = \underbrace{\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial \omega}{\partial y} - Q\dfrac{\partial \omega}{\partial x}}}_{\varphi(\omega)} \cdot \mu \quad . \tag{1.3.64}$$

Dacă noua expresie, notată $\varphi(\omega)$, este o funcție ce depinde doar de ω, ecuația (1.3.64) se scrie

$$d\mu - \varphi(\omega) \cdot \mu d\omega = 0. \tag{1.3.65}$$

Aceasta este o *ecuație cu variabile separabile*, în μ şi ω.

Împărțind cu μ, deducem

$$\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(\omega) d\omega, \tag{1.3.66}$$

cu soluția generală

$$\ln|\mu| = \int \varphi(\omega) d\omega + \ln C, \tag{1.3.67}$$

deci

$$\mu = C \cdot \mathrm{e}^{\int \varphi(\omega) d\omega}. \tag{1.3.68}$$

De fapt, ne interesează doar o soluție particulară a ecuației (1.3.65), deci putem lua $C = 1$, de exemplu.

După ce am deteminat factorul integrant, înmulțim cu el ecuația dată şi obținem o *ecuație cu diferențiale totale exacte*, pe care o rezolvăm conform modelului de la paragraful precedent.

Observație. Acest mod de rezolvare depinde de alegerea funcției ω; alegerea depinde, la rândul ei, de abilitatea rezolvitorului. Însă, de multe ori, ω are forme simple, sau este indicat.

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$\Bigg(\underbrace{-2x + \frac{1}{x+y}}_{P}\Bigg)\mathrm{d}x + \Bigg(\underbrace{-x + y + \frac{1}{x+y}}_{Q}\Bigg)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.3.69}$$

ştiind că admite un factor integrant de forma $\mu = \mu(x+y)$.

Rezolvare. Calculăm

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 - \frac{1}{(x+y)^2}. \tag{1.3.70}$$

Rezultă că

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{1.3.71}$$

astfel încât ecuația ***nu*** este cu diferențiale totale exacte.

Căutăm un factor integrant de forma $\mu = \mu(\omega)$, unde, conform indicației, $\omega = x + y$. Trebuie ca

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q). \tag{1.3.72}$$

Avem

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{d\omega}\cdot 1,\ \frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{d\omega}\cdot 1.$$

Pe de altă parte, din calculele de mai sus, rezultă

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1.$$

Din (1.3.72) rezultă

$$\frac{d\mu}{d\omega}\cdot P+\mu\cdot\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{d\mu}{d\omega}\cdot Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\mu,$$

deci

$$\frac{d\mu}{d\omega}\underbrace{(P-Q)}_{-\underbrace{(x+y)}_{\omega}}=\mu\underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{-1}. \tag{1.3.73}$$

Aceasta înseamnă că

$$-\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\omega=-\mu,$$

care este o ecuație cu variabile separabile. Împărțind cu $\omega\mu$, obținem *ecuația cu variabile separate*

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{d\omega}{\omega},$$

pentru care, căutând o soluție particulară, găsim

$$\ln|\mu|=\ln|\omega|.$$

Rezultă că factorul integrant căutat este $\mu=\omega$, adică

$$\boxed{\mu=x+y}.$$

Înmulțim deci ecuația cu $(x+y)$. Obținem

$$\overbrace{\left[-2x(x+y)+1\right]}^{p}dx+\overbrace{\left(y^2-x^2+1\right)}^{q}dy=0. \quad (1.3.74)$$

Aceasta este o *ecuație cu diferențiale totale exacte*, căci

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-2x,\ \frac{\partial q}{\partial x}=-2x.$$

Căutăm o funcție F astfel încât

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}=p=-2x^2-2xy+1\\&\frac{\partial F}{\partial y}=q=y^2-x^2+1\end{aligned}\right. \Bigg| \Rightarrow F=\frac{y^3}{3}-x^2y+y+\varphi(x).$$

Derivăm pe F în raport cu x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2xy+\varphi'(x).$$

Trebuie deci ca

$$-2xy+\varphi'(x)=-2x^2-2xy+1$$

şi rezultă că

$$\varphi(x)=-\frac{2}{3}x^3+x.$$

În final, funcția F are forma

$$F(x,y)=\frac{y^3}{3}-x^2y+y-\frac{2}{3}x^3+x;$$

soluția generală a ecuației (1.3.69) este deci

$$\boxed{y^3-3x^2y+3y-2x^3+3x=C}. \quad (1.3.75)$$

1.3.6. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE DE ORDINUL I

Ecuația

$$y'+p(x)y=q(x),\quad p,q\in C^1(\mathrm{I}),\ \mathrm{I}\subseteq\Re, \quad (1.3.76)$$

unde $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, defineşte ***ecuația diferențială de ordinul I, lineară şi neomogenă***.

Deci ***ecuația omogenă*** asociată este

$$y' + p(x)y = 0\,. \tag{1.3.77}$$

A. Membrul stâng al ecuației (1.3.76) defineşte ***operatorul*** *L*, care asociază fiecărei ***funcții*** *y* ***funcția*** $y' + p(x)y$, adică

$$Ly \equiv y' + p(x)y\,. \tag{1.3.78}$$

De exemplu, dacă *L* este definit ca

$$Ly \equiv y' + 2y\,, \tag{1.3.79}$$

atunci el realizează următoarea corespondență de la funcție la funcție:

$$\begin{aligned} &y_1 = x \xrightarrow{L} Ly_1 = 1 + 2x = 3x, \\ &y_2 = \cos x \xrightarrow{L} Ly_2 = -\sin x + 2\cos x, \\ &y_3 = \mathrm{e}^{-2x} \xrightarrow{L} Ly_3 = -2\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-2x} = 0. \end{aligned} \tag{1.3.80}$$

Putem spune că operatorul *L* dat de (1.3.78) este definit astfel:

$$L : \mathrm{C}^1(\mathrm{I}) \to \mathrm{C}^0(\mathrm{I}). \tag{1.3.81}$$

B. ***Operatorul*** *L* ***dat de*** (1.3.78) ***este linear***.

Definiția 1.5. Spunem că un operator $L : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, unde X, Y sunt spații vectoriale reale/complexe, este ***linear*** dacă

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2), \tag{1.3.82}$$

pentru orice $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ şi orice α, β reali/complecşi.

Dacă $y_1, y_2 \in \mathrm{C}^0(\mathrm{I})$, iar α, β sunt constante reale/complexe, atunci

$$\begin{aligned} L(\alpha y_1+\beta y_2) &\underset{\text{def}}{=} (\alpha y_1+\beta y_2)' + p(x)(\alpha y_1+\beta y_2) \\ &= \alpha y_1' + \beta y_2' + \alpha p(x) y_1 + \beta p(x) y_2 \\ &= \alpha\underbrace{\left[y_1' + p(x)y_1\right]}_{Ly_1} + \beta\underbrace{\left[y_2' + p(x)y_2\right]}_{Ly_2} = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2), \end{aligned} \tag{1.3.83}$$

deci L este ***linear***, conform definiției de mai sus.

Observație. ***Recunoaştem un operator diferențial linear după faptul că, întotdeauna în structura lui, atât funcția necunoscută cât şi derivata ei sunt la puterea întâi.***

Definiția 1.6. Numim ***nucleu*** al unui operator $L : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ şi notăm cu "ker" (de la kernel, engl.) mulțimea elementelor din X care îl anulează, adică

$$\ker L \equiv \{x \in \mathrm{X} \mid L(x) = 0_{\mathrm{Y}}\}. \tag{1.3.84}$$

Se ştie (cursul de Algebră, anul I) că ker L este ***subspațiu vectorial*** al lui X.

Pentru operatorul diferențial linear dat de (1.3.78), evident

$$\ker L \equiv \left\{y \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I}) \,\middle|\, Ly = 0\right\}, \tag{1.3.85}$$

deci ker L ***coincide cu mulțimea soluțiilor ecuației lineare şi omogene*** (1.3.77).

Ecuația lineară şi omogenă (1.3.78) poate fi scrisă sub forma unei ecuații cu variabile separabile:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y + p(x)y\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1.3.86}$$

de unde, prin împărțire cu y, deducem succesiv

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\mathrm{d}x, \\ &\mathrm{d}(\ln y) = -p(x)\mathrm{d}x, \\ &\ln y = -\int p(x)\mathrm{d}x + c. \end{aligned} \tag{1.3.87}$$

În ultima expresie, c este o constantă arbitrară, pe care o putem considera de forma $\ln C$. Trecând la exponențială în ultima egalitate, rezultă

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{1.3.88}$$

care este ***soluția generală a ecuației omogene asociate***.

Observație. Formula (1.3.88) arată că dimensiunea subspațiului vectorial $\ker L$ este 1.

În continuare, vom scrie ecuația (1.3.76) sub forma

$$Ly \equiv y' + p(x)y = q(x). \tag{1.3.89}$$

Putem demonstra imediat

Teorema 1.1. *Soluția generală a ecuației neomogene* (1.3.89) *este suma dintre o soluție particulară a ecuației neomogene şi soluția generală a ecuației omogene asigurate.*

<u>Demonstrație</u>. Într-adevăr, fie Y o soluție particulară a ecuației neomogene (1.3.108). Aceasta înseamnă că

$$LY \equiv Y' + p(x)Y = q(x). \tag{1.3.90}$$

Să efectuăm în (1.3.89) schimbarea de funcție

$$y = Y + z. \tag{1.3.91}$$

Introducând în (1.3.89), obținem

$$Ly = L(Y+z) \underset{L \text{ linear}}{=} LY + Lz = q(x) + Lz. \tag{1.3.92}$$

Dar $Ly = q(x)$, deci (1.3.92) implică $Lz = 0$, adică $z \in \ker L$.◘

CUM ÎL DETERMINĂM PE Y?

Răspunsul la această întrebare îl dă

Metoda variației constantelor (sau metoda lui Lagrange)

Căutăm pe Y de forma (1.3.88), numai că C va fi considerat funcție de x:

$$Y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{1.3.93}$$

Atunci

$$Y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - p(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{1.3.94}$$

şi, înlocuind în ecuația neomogenă (1.3.89), obținem

$$\begin{aligned} LY \equiv Y' + p(x)Y = C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - p(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \\ + p(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{1.3.95}$$

Însă $LY = q(x)$, deci

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x), \tag{1.3.96}$$

ceea ce conduce la

$$C'(x) = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{1.3.97}$$

deci C se obține prin integrare:

$$C(x) = \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x. \tag{1.3.98}$$

În final, soluția particulară Y este obținută direct prin cuadraturi

$$Y(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x. \tag{1.3.99}$$

Ținând seama de teorema 1.1, rezultă că

Soluția generală a ecuației lineare şi neomogene se obține prin cuadraturi şi este dată de

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \tag{1.3.100}$$

sau, echivalent, de

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right), \tag{1.3.101}$$

unde** C **este o constantă arbitrară.

Pentru rezolvarea unei ecuații lineare de ordinul I putem folosi deci una dintre ultimele două formule, însă în practică este mai simplu să procedăm direct. Din cele spuse mai sus se desprinde următorul

MOD DE REZOLVARE

Etapa I.

Se asociază lui (1.3.78) ecuația omogenă corespunzătoare:

$$Lz \equiv z' + p(x)z = 0. \tag{1.3.102}$$

Am arătat că soluția generală a acestei ecuații omogene este dată de formula (1.3.88), deci

$$z = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{1.3.103}$$

Etapa II.

Conform teoremei 1.1, rămâne să determinăm pe Y – o soluție particulară a ecuației (1.3.78).

Aceasta se realizează cu metoda variației constantelor, după cum am arătat.

Exemple. Să se determine soluția generală pentru următoarele ecuații:

a) $y' + xy = 0$.

Rezolvare. Este o ecuație diferențială de ordinul I, lineară şi omogenă. Ea se mai poate scrie succesiv

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = 0,$$
$$\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}x = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} + x\mathrm{d}x = 0;$$

ultima este o ecuație cu variabile separate. Soluția ei generală este

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int x\mathrm{d}x + \ln C\,,$$

sau

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln C\,,$$

unde C este o constantă arbitrară. Trecând la exponențială, găsim

$$\boxed{y = C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.}$$

b) $y' + xy = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Rezolvare. Este o ecuație diferențială de ordinul I, lineară şi neomogenă.

Etapa 1. Ecuația omogenă asociată este

$$z' + xz = 0\,.$$

Soluția ei generală a fost deja găsită la exemplul ***b)***. Ea este $z = C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Etapa 2. Pentru a determina o soluție particulară Y a ecuației neomogene, folosim metoda variației constantelor. Căutăm pe Y de forma $Y = C(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Introducem în ecuația neomogenă:

$$\begin{array}{r|l||}
x & Y = C(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\
1 & Y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - xC(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}
\end{array} +$$

$$Y' + xY = C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - xC(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + xC(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,,$$

şi cum

$$Y' + xY = xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

rezultă că

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

adică $C'(x) = x$ şi deci

$$C(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Obținem $Y = \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Soluția generală a ecuației neomogene este $y = z + Y$, aşadar

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

sau, altfel scris

$$\boxed{y = \left(C + \frac{x^2}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}},}$$

unde *C* este o constantă arbitrară.

1.3.7. ECUAȚIA BERNOULLI

Este de forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \notin \{0,1\}, \; p, q \in C^0(I), \; I \subseteq \Re. \tag{1.3.104}$$

- ♣ Dacă $\alpha = 0$, rezultă ecuația de ordinul I lineară şi neomogenă $y' + (p - q)y = 0$.
- ♣ Dacă $\alpha = 1$, rezultă ecuația de ordinul I lineară şi omogenă $y' + py = q$.

MOD DE REZOLVARE

♣ Împărțim (1.3.104) cu y^{α}

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\cdot\frac{1}{y^{\alpha-1}} = q(x). \tag{1.3.105}$$

♣ Derivăm $\frac{1}{y^{\alpha-1}} = y^{1-\alpha}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^{1-\alpha}\right) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}. \tag{1.3.106}$$

Deci (1.3.104) se transformă în

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y^{\alpha-1}}\right) + p(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = q(x). \tag{1.3.107}$$

Notăm

$$u = \frac{1}{y^{\alpha-1}}, \tag{1.3.108}$$

şi obținem

$$\frac{1}{1-\alpha}u' + p(x)u = q(x), \tag{1.3.109}$$

care este o ***ecuație lineară şi neomogenă***, având pe u drept funcție necunoscută. O rezolvăm şi revenim la y prin (1.3.108).

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$y' + \frac{2}{3x}y = \frac{1}{3}y^2. \tag{1.3.110}$$

Recunoaştem în ea o ecuație de tip Bernoulli, cu $\alpha = 2$.

Rezolvare.

♣ ***Împărțim ecuația cu*** y^2:

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{2}{3x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{3}.$$

Notăm $u=\frac{1}{y}\Rightarrow u'=-\frac{y'}{y^2}$. Avem

$$-u'+\frac{2}{3x}u=\frac{1}{3}, \tag{1.3.111}$$

care este o ecuație lineară şi neomogenă.

♣ ***Rezolvăm ecuația lineară*** (1.3.111).

- Ecuația omogenă asociată este

$$-u'+\frac{2}{3x}u=0. \tag{1.3.112}$$

Rezultă $\frac{u'}{u}=\frac{2}{3x}$, de unde deducem $\ln|u|=\frac{2}{3}\ln|x|+\ln|C|$.

Soluția generală a ecuației (1.3.112) este

$$u=C\cdot x^{\frac{2}{3}}. \tag{1.3.113}$$

- Soluția generală a ecuației neomogene (1.3.111) este deci

$$u=C\cdot x^{\frac{2}{3}}+U, \tag{1.3.114}$$

unde U este o soluție particulară a lui (1.3.111), pe care o determinăm cu metoda variației constantelor. Rezultă, succesiv,

$$\begin{array}{r|l} \frac{2}{3x} & U(x)=C(x)\cdot x^{\frac{2}{3}} \\ -1 & U'(x)=C'(x)\cdot x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\cdot C(x) \\ \hline & \end{array}$$

$$-U'+\frac{2}{3x}U=-C'(x)\cdot x^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3},$$

astfel încât

$$C'(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}},$$

adică

$$C(x) = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot x^{1-\frac{2}{3}} = -x^{\frac{1}{3}};$$

soluția particulară *U* este deci

$$U = -x.$$

Soluția generală a ecuației (1.3.111) este

$$\boxed{u = -x + C \cdot x^{\frac{2}{3}}}.$$

♣ ***Soluția generală a ecuației Bernoulli*** (1.3.110) este dată de

$$\boxed{y = \left(-x + C \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}}.$$

1.3.8. ECUAȚIA RICCATI

Are forma

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x), \quad p, q, r \in C^0(I), I \subseteq \Re. \qquad (1.3.115)$$

- Dacă $q = 0$, rezultă ecuația lineară şi neomogenă

  $y' + p(x)y = r(x)$.

- Dacă $r = 0$, rezultă ecuația Bernoulli $y' + p(x)y = -q(x)y^2$.

Dacă se cunoaşte o soluție particulară $Y(x)$, ecuația Riccati se rezolvă prin cuadraturi.

MOD DE REZOLVARE

Într-adevăr, cu schimbarea

$$y = Y + z\,, \tag{1.3.116}$$

avem $y' = Y' + z'$ şi, înlocuind în (1.3.115), aceasta devine

$$Y' + z' + p(x)(Y + z) + q(x)\left(Y^2 + 2Yz + z^2\right) = r(x). \tag{1.3.117}$$

Însă $Y' + pY + qY^2 = r(x)$, deci z satisface

$$z' + [p(x) + 2q(x)Y]z + q(x)z^2 = 0\,, \tag{1.3.118}$$

care este o ecuație Bernoulli, cu $\alpha = 2$. După rezolvarea ei, revenim la y, cu schimbarea de funcție (1.3.116).

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$y' = \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3x^2}\,, \tag{1.3.119}$$

ştiind că admite o soluție particulară $Y(x) = -\frac{1}{x}$.

Rezolvare.

Folosind schimbarea de funcție

$$y = -\frac{1}{x} + z\,, \tag{1.3.120}$$

obținem

$$\frac{1}{x^2} + z' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - 2\frac{z}{x} + z^2\right) + \frac{2}{3x^2}\,.$$

Rezultă ecuația Bernoulli

$$z' + \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3}z^2, \tag{1.3.121}$$

pe care am rezolvat-o la exemplul corespunzător cazului Bernoulli, găsind

$$z=\left(-x+C\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}.$$

Revenind la y, cu schimbarea (1.3.120), rezultă soluția generală a ecuației Riccati (1.3.119)

$$\boxed{y=-\frac{1}{x}+\left(-x+C\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}},$$

unde C este o constantă arbitrară.

Să menționăm câteva cazuri particulare simple în care ecuația Riccati se rezolvă prin cuadraturi.

1) Dacă

$$r(x)-p(x)-q(x)=0,\quad x\in I, \tag{1.3.122}$$

atunci se arată că soluția generală a ecuației Riccati este

$$y(x)=\frac{C+\int[Q(x)+R(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x-\varphi(x)}{C+\int[Q(x)+R(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x+\varphi(x)},\quad \varphi(x)=\mathrm{e}^{\int[Q(x)-R(x)]\mathrm{d}x}. \tag{1.3.123}$$

2) Presupunem, mai general, că

$$b^2r(x)-a^2p(x)-abq(x)=0,\ x\in I, \tag{1.3.124}$$

unde constantele a şi b nu sunt simultan nule. Dacă $b\neq 0$, atunci, cu schimbarea de funcție

$$y(x)=a/b+u(x), \tag{1.3.125}$$

obținem pentru noua funcție necunoscută u o ecuație Bernoulli

$$u'=Q(x)u^2+\left[\frac{2a}{b}Q(x)+P(x)\right]u. \tag{1.3.126}$$

3) Dacă p şi q sunt polinoame satisfăcând $\Delta = p^2 - 2p' - 4R = \text{const}$, atunci $Y_1(x) = -\frac{1}{2}\left[P(x) + \sqrt{\Delta}\right]$ and $Y_2(x) = -\frac{1}{2}\left[P(x) - \sqrt{\Delta}\right]$ sunt ambele soluții ale ecuației Riccati

$$y' = p(x)y + y^2 + r(x)\,. \tag{1.3.127}$$

Comentariu. Ecuația Riccati este deosebit de importantă în aplicațiile din mecanică, inginerie, fizică, chimie, etc.; de aceea, a fost mult studiată. Are o serie de proprietăți remarcabile (de exemplu, oricare 4 soluții distincte ale unei ecuații Riccati date sunt totdeauna în raport anarmonic). Sistemele de ecuații Riccati sunt printre cele mai des folosite în cercetări moderne din domeniul ştiințelor naturii.

1.3.9. ECUAȚIA CLAIRAUT

Este de forma

$$y = xy' + \varphi(y'). \tag{1.3.128}$$

MOD DE REZOLVARE

Folosim schimbarea

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\,, \tag{1.3.129}$$

de unde rezultă imediat

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x\,. \tag{1.3.130}$$

Pe de altă parte, din (1.3.128) rezultă

$$y = xp + \varphi(p), \tag{1.3.131}$$

relație care, diferențiată, devine

$$\underbrace{\mathrm{d}y}_{p\mathrm{d}x} = p\mathrm{d}x + x\mathrm{d}p + \varphi'(p)\mathrm{d}p\,. \tag{1.3.132}$$

Egalând cele două expresii ale lui dy, obținem

$$\cancel{p\mathrm{d}x} = \cancel{p\mathrm{d}x} + x\mathrm{d}p + \varphi'(p)\mathrm{d}p\,, \tag{1.3.133}$$

deci

$$\left(x + \varphi'(p)\right)\mathrm{d}p = 0\,. \tag{1.3.134}$$

Rezultă că cel puțin una din următoarele egalități este valabilă

$$\begin{cases} \mathrm{d}p = 0, \\ x + \varphi'(p) = 0. \end{cases} \tag{1.3.135}$$

- **Cazul a).** Dacă $\mathrm{d}p = 0$, atunci $p = C$ şi deci

$$\boxed{y = xC + \varphi(C)}, \tag{1.3.136}$$

unde C este o constantă arbitrară. Relația (1.3.136) reprezintă ***soluția generală a ecuației Clairaut***. Geometric, soluția ecuației Clairaut reprezintă un ***fascicol de drepte***.

- **Cazul b).** Dacă $x + \varphi'(p) = 0$, atunci $x = -\varphi'(p)$ şi deci

$$y = -\varphi'(p)\cdot p + \varphi(p)$$

Rezultă

$$\boxed{\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = -\varphi'(p)\cdot p + \varphi(p), \end{cases}} \tag{1.3.137}$$

care reprezintă ecuația parametrică a unei curbe integrale pentru ecuația Clairaut, care ***nu*** se obține din soluția generală, particularizând pe C. De aceea, această soluție este o ***soluție singulară***. Geometric, ea este ***înfăşurătoarea fascicolului de drepte*** reprezentat de soluția generală.

Într-adevăr, dacă $F(x, y, C) = 0$ este un fascicol de curbe, atunci eliminând pe C între relațiile

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial C}(x,y,C)=0, \end{cases} \tag{1.3.138}$$

obținem ***înfăşurătoarea fascicolului***.

În cazul ecuației Clairaut, F şi $\dfrac{\partial F}{\partial C}$ au următoarea formă

$$\begin{cases} F(x,y,C)\equiv xC+\varphi(C)-y=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial C}(x,y,C)\equiv x+\varphi'(C)=0. \end{cases} \tag{1.3.139}$$

Eliminând pe C între cele două ecuații de mai sus, obținem

$$\begin{cases} x=-\varphi'(C), \\ y=-\varphi'(C)\cdot C+\varphi(C), \end{cases} \tag{1.3.140}$$

care sunt tocmai ecuațiile parametrice ale soluției singulare.

Deci soluția singulară a ecuației Clairaut este înfăşurătoarea fascicolului de drepte ce reprezintă soluția sa generală.

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$y=xy'-y'^2. \tag{1.3.141}$$

Rezolvare.

$$\left.\begin{matrix} y'=p \\ y=x\cdot p-p^2 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}y=p\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}y=p\mathrm{d}x+x\mathrm{d}p-2p\mathrm{d}p. \end{cases}$$

Egalând expresiile lui dy, deducem

$$p\mathrm{d}x+x\mathrm{d}p-2p\mathrm{d}p=p\mathrm{d}x \Rightarrow (x-2p)\mathrm{d}p=0,$$

adică

$$\begin{cases} \mathrm{d}p=0, \\ x=2p. \end{cases} \tag{1.3.142}$$

- **Cazul a).** $\mathrm{d}p = 0 \Rightarrow p = C$, deci

$$\boxed{y = x \cdot C - C^2}, \tag{1.3.143}$$

care reprezintă ***soluția generală a ecuației Clairaut***.

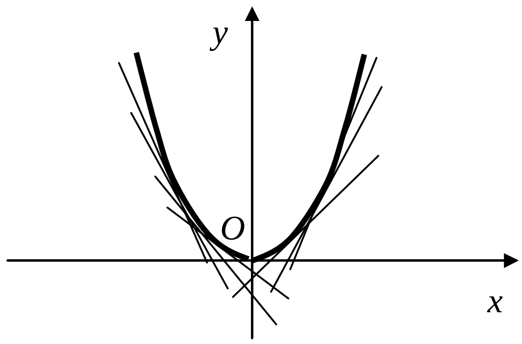
- **Cazul b).** Avem

$$\begin{cases} x = 2p, \\ y = 2p \cdot p - p^2 = p^2, \end{cases}$$

de unde deducem imediat

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4}}, \tag{1.3.144}$$

care reprezintă ***soluția singulară a ecuației Clairaut***.



În figura de mai sus este înfățișată soluția singulară, tangentă în fiecare punct la una din dreptele fascicolului care reprezintă soluția generală a ecuației Clairaut considerate.

1.3.10. ECUAȚIA LAGRANGE

Este de forma

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0, \tag{1.3.145}$$

deci depinde linear de *x* și *y*. Dacă $A(y') \neq 0$, împărțind cu el, obținem

$$y = f(y')x + g(y'), \qquad f(y') = -\frac{B(y')}{A(y')},\; g(y') = -\frac{C(y')}{A(y')}. \tag{1.3.146}$$

Dacă $f(y') \equiv y'$, atunci (1.3.146) este o ecuație Clairaut; a fost tratată în paragraful precedent.

Presupunem deci că $f(y') \neq y'$.

MOD DE REZOLVARE

Procedăm ca în cazul ecuației Clairaut. Fie deci

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p, \tag{1.3.147}$$

de unde rezultă imediat

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x. \tag{1.3.148}$$

Pe de altă parte, din (1.3.146) rezultă

$$y = xf(p) + g(p), \tag{1.3.149}$$

relație care, diferențiată, devine

$$\underbrace{\mathrm{d}y}_{p\mathrm{d}x} = f(p)\mathrm{d}x + xf'(p)\mathrm{d}p + g'(p)\mathrm{d}p. \tag{1.3.150}$$

Egalând cele două expresii ale lui d*y*, obținem

$$p\mathrm{d}x = f(p)\mathrm{d}x + xf'(p)\mathrm{d}p + g'(p)\mathrm{d}p, \tag{1.3.151}$$

deci

$$[f(p) - p]\mathrm{d}x + [xf'(p) + g'(p)]\mathrm{d}p = 0. \tag{1.3.152}$$

Dacă $f(p) = \text{const}$, atunci ecuația (1.3.152) este cu variabile separabile şi se rezolvă ca în paragraful 1.3.2.

În caz contrar, avem două situații posibile:

a) $f(p) \neq p$. Atunci împărțim (1.3.152) cu $f(p) - p$ şi rezultă

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}+\frac{f'(p)}{f(p)-p}x+\frac{g'(p)}{f(p)-p}=0. \qquad (1.3.153)$$

Aceasta este o ecuație diferențială ordinară lineară şi neomogenă, a cărei funcție necunoscută este *x*, variabila independentă fiind *p*. Rezolvând-o cu metoda descrisă la paragraful 1.3.6, obținem soluția sub forma $x(p)=a_1(p)C+b_1(p)$, unde C este o constantă arbitrară.

Din (1.3.149) rezultă

$$y(p)=[a_1(p)C+b_1(p)]f(p)+g(p), \qquad (1.3.154)$$

sau, altfel scris,

$$y(p)=a_2(p)C+b_2(p), \qquad (1.3.155)$$

unde am folosit notațiile

$$a_2(p)=a_1(p)f(p),\quad b_2(p)=b_1(p)f(p)+g(p). \qquad (1.3.156)$$

În final obținem ***soluția generală a ecuației Lagrange*** sub forma parametrică

$$\begin{cases} x(p)=a_1(p)C+b_1(p), \\ y(p)=a_2(p)C+b_2(p). \end{cases} \qquad (1.3.157)$$

b) Dacă $f(p)-p=0$ admite soluțiile reale p_i, înlocuind în ecuația (1.3.146) şi ținând seama că $f(p_i)=p_i$, rezultă soluțiile

$$y=xp_i+g(p_i), \qquad (1.3.158)$$

relații care reprezintă ecuații ale unor drepte, pentru fiecare p_i.

Aceste soluții pot fi singulare.

Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației

$$y=x-\frac{4}{9}y'^2+\frac{8}{27}y'^3. \qquad (1.3.159)$$

Rezolvare. Este o ecuație de tip Lagrange. Deci aplicăm schimbarea

$$y' = p \;\rightarrow\; \mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \tag{1.3.160}$$

şi deducem

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3, \tag{1.3.161}$$

din care obținem, prin diferențiere,

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x - \frac{8}{9}p\mathrm{d}p + \frac{8}{9}p^2\mathrm{d}p. \tag{1.3.162}$$

Egalând cele două expresii ale lui dy, găsim

$$p\mathrm{d}x = \mathrm{d}x - \frac{8}{9}p\mathrm{d}p + \frac{8}{9}p^2\mathrm{d}p, \tag{1.3.163}$$

sau, după efectuarea calculelor,

$$(p-1)\left[\mathrm{d}x - \frac{8}{9}p\mathrm{d}p\right] = 0. \tag{1.3.164}$$

Rezultă că cel puțin una din următoarele egalități este valabilă:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x - \dfrac{8}{9}p\mathrm{d}p = 0, \\ p = 1. \end{cases} \tag{1.3.165}$$

a) Prima egalitate este de fapt ecuația cu variabile separate

$$\mathrm{d}x - \frac{8}{9}p\mathrm{d}p = 0,$$

cu soluția generală

$$x = \frac{4}{9}p^2 + C. \tag{1.3.166}$$

Din (1.3.161) rezultă şi

$$y = \frac{8}{27}p^3 + C. \tag{1.3.167}$$

Soluția generală a ecuației Lagrange se obține deci în ***forma parametrică***

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{9} p^2 + C, \\ y = \dfrac{8}{27} p^3 + C. \end{cases} \tag{1.3.168}$$

Eliminând p între cele două expresii din (1.3.168), găsim ***soluția generală*** sub ***forma implicită***

$$\boxed{(x - C)^3 = (y - C)^2}. \tag{1.3.169}$$

b) Cea de a doua egalitate (1.3.165) implică $p = 1$, care, înlocuit în (1.3.161), duce la ***soluția singulară*** a ecuației Lagrange:

$$\boxed{y = x - \frac{4}{27}}. \tag{1.3.170}$$

1.4. METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE

În paragraful precedent am pus în evidență unele tipuri de ecuații diferențiale de ordinul I care pot fi rezolvate prin cuadraturi, conducând la formule analitice concrete ale soluțiilor. Dar nu sunt multe cazurile în care apar ecuații de aceste tipuri. Acest neajuns ar putea fi compensat prin găsirea unor metode aproximative ale soluțiilor.

Una dintre cele mai uzitate asemenea metode este ***metoda aproximațiilor succesive***, sau ***metoda lui Picard***. Întrucât metoda este constructivă, o vom prezenta în cadrul complet al teoremei de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy.

1.4.1. TEOREMA CLASICĂ DE EXISTENȚĂ ŞI UNICITATE CAUCHY-PICARD

Teorema 1.2. *Fie problema Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Presupunem că f satisface următoarele condiții:

1) $f \in \mathrm{C}^0(\Omega), \quad \Omega = \{(x,y) \in \Re^2, |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$

2) *f este Lipschitz în raport cu y, deci există o constantă pozitivă K astfel încât*

$$|f(x,Y) - f(x,Z)| \le K|Y - Z|, \quad \forall (x,Y),(x,Z) \in \Omega. \tag{1.4.2}$$

Atunci problema Cauchy (1.4.1) *admite o soluție unică* $y \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$, *unde I este intervalul* $\mathrm{I} = (x_0 - h, x_0 + h)$, *lungimea sa* $2h$ *fiind determinată astfel:*

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \sup_{(x,y)\in\Omega} |f(x,y)|. \tag{1.4.3}$$

* Demonstrație. M există şi este finit, căci f este continuu pe compact. Demonstrăm întâi

EXISTENȚA SOLUȚIEI

Integrând ecuația din (1.4.1) şi ținând cont de condiția Cauchy, observăm că problema (1.4.1) este echivalentă cu ecuația integrală

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t. \tag{1.4.4}$$

Existența este constructivă, prin

METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESSIVE,

care se mai numeşte şi ***metoda lui Picard***, autorul ei.

Metoda este eficientă şi are un grad mare de aplicabilitate. Ea poate fi utilizată şi în alte probleme.

În cazul nostru, considerăm următorul şir aproximant pentru soluția problemei (1.4.4):

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathcal{N}. \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Urmăm câteva etape:

I. ***Demonstrăm că şirul*** $\{y_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ ***este bine definit*** şi toate funcțiile $y_n, n \in \mathcal{N}$, au valorile numai în intervalul $[y_0 - b, y_0 + b]$, pentru orice $x \in$ I.

II. ***Arătăm că şirul*** $\{y_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ ***este uniform şi absolut convergent pe*** I.

În acest scop, considerăm seria

$$S \equiv y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots\ , \tag{1.4.6}$$

ale cărei sume parțiale sunt chiar $y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) \equiv y_n$.

Demonstrăm că

♣seria (1.4.6) are termenii majorați de constante pozitive pe I, iar

♣ seria numerică a acestor constante este convergentă.

Conform ***criteriului lui Weierstrass*** (vezi cursul de Analiză Matematică, partea I), rezultă că

Seria (1.4.6) ***este absolut şi uniform convergentă pe I.***

Să notăm suma acestei serii cu *y*. Termenul general al lui (1.4.6) este continuu, deci, conform proprietăților sumei seriilor de funcții (Cursul de Analiză Matematică, partea I), că

Suma** y **a seriei (1.4.6) ***este continuă***.

Se poate trece deci la limită în relația de definiție (1.4.5) şi avem

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t\,; \tag{1.4.7}$$

cum y şi f sunt continue, rezultă că membrul drept al lui (1.4.7) este derivabil, deci membrul stâng y este de clasă $\mathrm{C}^1(\mathrm{I})$. În concluzie, y satisface problema Cauchy (1.4.1).

UNICITATEA SOLUȚIEI

Se demonstrează prin reducere la absurd. ◘

1.4.2. PRINCIPIUL CONTRACȚIEI

Metoda aproximațiilor succesive aplicată ecuațiilor diferențiale ordinare implică un concept mult mai general, cu numeroase aplicații, anume, ***principiul contracției***. Îl vom prezenta pe scurt.

Fie X o mulțime pe care s-a definit o ***distanță*** (***metrică***):

$$d : X\times X \to \Re_+\,, \tag{1.4.8}$$

cu proprietățile:

1. $d(x,y)>0$ şi $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

2. $d(x,y)=d(y,x), \forall x,y\in X$, proprietatea de ***simetrie***,

3. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y), \forall x,y,z\in X$, ***inegalitatea triunghiului***.

Astfel, X împreună cu d ce îndeplineşte proprietățile de mai sus formează ***spațiul metric*** (X,d).

Definiții:

1. Şirul $\{x_n\}_{n\in\mathfrak{N}}\subset X$ este ***convergent în metrică*** către $x\in X$ dacă şirul numeric $\{d(x_n,x)\}_{n\in\mathfrak{N}}$ este convergent.

2. Şirul $\{x_n\}_{n\in\mathfrak{N}} \subset X$ se numeşte ***Cauchy în metrică*** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ găsim un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \tag{1.4.9}$$

pentru orice rang $n > N(\varepsilon)$ şi orice $p \in \mathfrak{N}$.

3. (X, d) se numeşte ***spațiu metric complet*** dacă orice şir Cauchy în metrică admite o limită în X.

Să considerăm acum un operator $T : X \to X$.

Definiții:

1. T se numeşte ***contracție*** dacă există un număr pozitiv subunitar $\rho < 1$ astfel încât

$$d(Tx, Ty) \leq \rho d(x, y), \qquad \forall x, y \in X. \tag{1.4.10}$$

2. x se numeşte ***punct fix*** pentru T dacă

$$x = Tx. \tag{1.4.11}$$

Cu aceste precizări şi definiții, putem enunța acum, fără a o demonstra,

Teorema 1. 3. (***Principiul contracției***): *Fie* (X, d) *un spațiu metric complet şi* $T : X \to X$ *o contracție. Atunci* T *admite un punct fix unic.*

APLICAȚIE: DEMONSTRAREA TEOREMEI CAUCHY-PICARD CU PRINCIPIUL CONTRACȚIEI

Teorema 1.4. *Fie problema Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.4.12}$$

Presupunem adevărate ipotezele teoremei 1.3, *deci*

1) $f \in C^0(D), \quad D = \{(x, y) \| x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$;

2) f Lipschitz în raport cu y pe D, adică există o constantă $K > 0$ astfel încât

$$|f(x,Y)-f(x,Z)|<K|Y-Z|, \qquad \forall (x,Y),(x,Z)\in D. \tag{1.4.13}$$

Atunci problema Cauchy (1.4.12) *admite local o soluție unică.*

Demonstrație: Ca şi în demonstrarea teoremei 1.2, integrăm ecuația din (1.4.12) şi rezultă, ținând seama şi de condiția Cauchy

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t. \tag{1.4.14}$$

Problema Cauchy (1.4.12) este deci echivalentă cu ecuația integrală (1.4.14). Aceasta pune în evidență operatorul

$$Ty\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t, \tag{1.4.15}$$

care este definit pe mulțimea (spațiul) $\mathrm{C}^0(\mathrm{I}_0)$, cu valori tot în $\mathrm{C}^0(\mathrm{I}_0)$, I_0 fiind intervalul $\mathrm{I}_0=[x-a,x+a]$. Fie

$$h=\min\left\{\frac{1}{K},a\right\}, \tag{1.4.16}$$

unde K este constanta Lipschitz şi să considerăm intervalul $\mathrm{I}=[x_0-h,x_0+h]$.

Atunci, dacă pe $\mathrm{C}^0(\mathrm{I}_0)$ considerăm distanța definită de

$$d(x,y)=\sup_{x\in I}|y(x)-z(x)|, \quad y,z\in \mathrm{C}^0(\mathrm{I}), \tag{1.4.17}$$

avem

$$d(Ty,Tz) = \sup_{x\in I}\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t,z(t))\mathrm{d}t\right| \leq$$
$$\leq \sup_{x\in I} K\left|\int_{x_0}^{x}|y(t)-z(t)|\mathrm{d}t\right| \leq K|x-x_0|\cdot d(y,z). \quad (1.4.18)$$

Rezultă

$$d(Ty,Tz) \leq Khd(y,z), \quad (1.4.19)$$

unde $Kh \equiv \rho < 1$, conform inegalității (1.4.16).

Deci T este contracție.

Să observăm că $C^0(I)$ este complet în raport cu metrica, definită, de fapt, cu ajutorul normei "sup". Aplicăm principiul contracțiilor şi rezultă că există $Y \in C^0(I)$, unic, astfel încât

$$Y = TY, \quad (1.4.20)$$

adică

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,Y(t))\mathrm{d}t. \quad (1.4.21)$$

Însă f este continuu, deci primitiva din membrul drept este de clasă $C^1(I)$. Rezultă $Y \in C^1(I)$, aşadar Y satisface (1.4.12).◘

Exemplu: Fie problema Cauchy

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0\end{cases}, \quad D = \{(x,y) \,|\, |x| < 1, |y| < 1\}. \quad (1.4.22)$$

Să se aproximeze soluția problemei Cauchy folosind metoda aproximațiilor successive.

Rezolvare:

ETAPA 1. Identificăm datele din teoremele 1.3 şi 1.4:

$$f(x,y)=x^2+y^2,\quad x_0=0,\quad y_0=0,\ a=1,\quad b=1. \tag{1.4.23}$$

ETAPA 2. Determinăm intervalul pe care este valabilă metoda.

a) Conform teoremei 1.3, avem

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\quad M=\sup_{(x,y)\in D}\{|f(x,y)|\}, \tag{1.4.24}$$

unde

$$M=\sup_{(x,y)\in D}\{|f(x,y)|\}=\sup_{|x|<1,|y|<1}\{|x^2+y^2|\}=2, \tag{1.4.25}$$

deci

$$h=\min\left\{1,\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}. \tag{1.4.26}$$

b) Conform teoremei 1.4, avem

$$|f(x,y)-f(x,z)|=|x^2+y^2-x^2-z^2|\le|y-z||y+z| \tag{1.4.27}$$

deci

$$|f(x,y)-f(x,z)|<2|y-z|. \tag{1.4.28}$$

Rezultă $K=2$ şi, conform inegalităţii (1.4.16),

$$h=\min\left\{\frac{1}{K},a\right\}=\min\left\{\frac{1}{2},1\right\}=\frac{1}{2}, \tag{1.4.29}$$

adică aceeaşi valoare ca în cazul teoremei 1.3.

Intervalul căutat este deci

$$\mathrm{I}\equiv\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \tag{1.4.30}$$

Să calculăm primele trei aproximații succesive ale soluției problemei (1.4.22). Avem

$$\begin{aligned}
&y_0 = 0,\\
&y_1 = 0 + \int_0^x \left(t^2 + 0^2\right)\mathrm{d}t = \underline{\frac{x^3}{3}},\\
&y_2 = 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \underline{\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}},\\
&y_3 = \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \underline{\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}}.
\end{aligned} \tag{1.4.31}$$

Observăm că funcțiile y_1, y_2, y_3 sunt impare şi crescătoare. Deci fiecare dintre ele îşi atinge maximum-ul în punctul $x = \frac{1}{2}$. Calculând valoarea aproximantelor y_1, y_2, y_3 în acest punct, găsim:

$$\begin{aligned}
&y_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} \cong 0{,}041666,\\
&y_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}041666 + \frac{1}{63 \cdot 128} \cong 0{,}04179,\\
&y_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}04179 + \underbrace{\frac{1}{2^{10} \cdot 2079} + \frac{1}{2^{15} \cdot 59535}}_{<10^{-6}}.
\end{aligned} \tag{1.4.32}$$

Deci chiar pentru un număr mic de iterații (trei), soluțiile aproximante diferă foarte puțin.

Observații.

- Nu întotdeauna valorile lui h calculate conform celor două teoreme 1.3 şi 1.4 coincid; aceasta, datorită calculului constantei Lipschitz K pe de o parte şi cel al maximum-ului funcției f, pe de altă parte.

- Când aplicăm metoda aproximaţiilor succesive, lucrurile se întâmplă ca în cazul căutării limitei unui şir Cauchy: nu cunoaştem limita, dar, pe măsură ce avansăm în şir, termenii se apropie între ei, apropiindu-se în acest fel şi de limită.

Exemplu. Tastaţi un număr arbitrar pe display-ul unui calculator de buzunar şi apăsaţi succesiv tasta "cos" (*calculând în radiani*!). După câteva iteraţii, numărul afişat pe display stă pe loc.

Aceasta înseamnă că aţi rezolvat ecuaţia $x = \cos x$

cu precizie de 10^{-7} ***!***

1.5. APLICAŢII ÎN MECANICĂ, FIZICĂ ŞI INGINERIE

Aplicaţia 1.5.1. Mişcarea corpurilor pe verticală în vecinătatea suprafeţei Pământului (D. Comănescu, I. Caşu)

Problema fizică. În multe situaţii fizice concrete corpurile pot fi considerate puncte materiale (imaginea în spaţiu a acestora este un punct geometric) cu masa constantă *m*. În această secţiune corpurile se mişcă în apropierea suprafeţei terestre, prin urmare forţele cele mai importante ce acţionează asupra corpului sunt greutatea $\vec{G}$ şi forţa de frecare cu aerul $\vec{F}_a$. Greutatea are expresia $\vec{G} = m\vec{g}$, unde $\vec{g}$ este vectorul acceleraţiei gravitaţionale şi este un vector constant de mărime $g = 9{,}81 m/s^2$, direcţie verticală şi având sensul spre centrul Pământului. Cea mai utilizată expresie a forţei de frecare cu aerul este $\vec{F}_a = -\mu \cdot |v| \cdot \vec{v}$ unde $\vec{v}$ este vectorul viteză ce are mărimea $|v|$, iar μ este o constantă pozitivă numită *coeficient de frecare*. Vom presupune că punctul material este aruncat de pe suprafaţa terestră vertical în sus cu viteza de mărime v_0. Acceptăm că mişcarea este rectilinie şi se desfăşoară pe verticala ce trece prin poziţia iniţială a corpului. Pe dreapta pe care se realizează mişcarea alegem un reper cu originea

în poziția inițială a corpului şi cu sensul pozitiv "în sus". Modelul matematic al mişcărilor este o consecință a teoremei impulsului ce poate fi exprimată astfel "variația impulsului este egală cu forța rezultantă ce acționează asupra punctului material".

Vom analiza pe rând câteva mişcări care apar mai des în aplicațiile practice.

A. MIŞCAREA SUB ACȚIUNEA GREUTĂȚII

Model matematic. În această secțiune vom ține seama doar de greutate şi vom neglija frecarea cu aerul. Notând cu *v* componenta vitezei pe axa de mişcare, ținând seama de teorema impulsului şi alegerea reperului, evoluția vitezei este modelată prin problema Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Soluție. Ecuația diferențială este cu variabile separabile, mai precis o problemă de primitive, iar soluția problemei Cauchy este

$$v(t) = v_0 - g \cdot t.$$

Notăm cu *x* componenta mişcării pe axa verticală. Aceasta este soluția următoarei probleme Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 - g \cdot t \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Şi în această situație avem o problemă de primitive, cu soluția:

$$x(t) = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Interpretare fizică. În figura 1.5.1 este prezentată simularea mişcării pe verticală pentru $v_0 = 150\, m/s$.

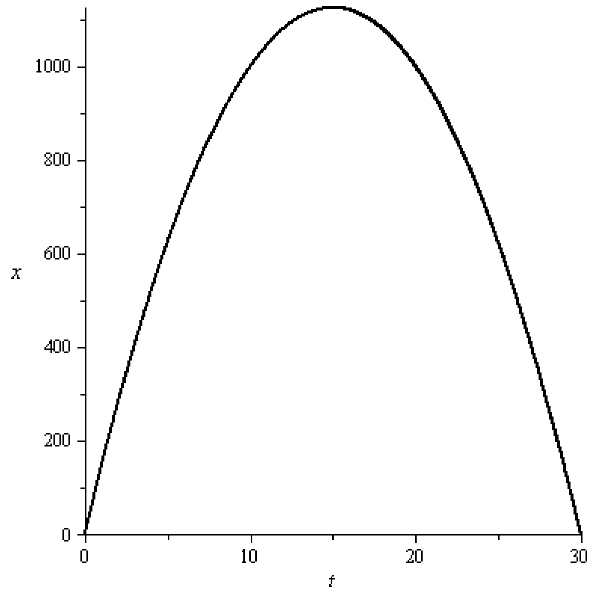


Figura 1.5.1. Mişcarea pe verticală sub acțiunea greutății

Analizând matematic viteza *v* şi mişcarea *x* deducem următoarele:

- în intervalul temporal $[0, \frac{v_0}{g}]$ corpul execută o mişcare ascendentă ajungând la înălțimea maximă $H_{\max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$;
- în intervalul temporal $[\frac{v_0}{g}, \frac{2 \cdot v_0}{g}]$ corpul execută o mişcare descendentă căzând pe Pământ cu o viteză de mărime v_0;
- deşi soluțiile problemelor Cauchy se pot extinde matematic şi după momentul $\frac{2 \cdot v_0}{g}$ acestea îşi pierd semnificația fizică.

B. MIŞCAREA SUB ACȚIUNEA GREUTĂȚII ŞI A FRECĂRII CU AERUL

Model matematic. Notând cu v componenta vitezei pe axa de mişcare şi ținând seama de teorema impulsului şi alegerea reperului evoluția vitezei este modelată prin problema Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g - \mu \cdot v \cdot |v| \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

O analiză calitativă a soluției pune în evidență existența unui interval de forma $[0, T_u]$ în care viteza v este pozitivă. Pentru $t > T_u$ viteza este negativă.

Soluție. Aceste observații ne conduc la separarea studiului în două cazuri.

B1. Mişcarea ascendentă

În acest caz $t \in [0, T_u]$ iar problema Cauchy devine

$$\begin{cases} \dot{v} = -g - \mu \cdot v^2, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Ecuația diferențială poate fi tratată fie ca o ecuație cu variabile separabile, fie ca o ecuație Riccati. Soluția problemei Cauchy este:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \cdot tg\,(arctg(\sqrt{\frac{\mu}{g}} \cdot v_0) - \sqrt{\mu \cdot g} \cdot t).$$

Această formă pentru viteză este valabilă până când viteza se anulează. Din această condiție se determină timpul de urcare

$$T_u = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot g}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{\mu}{g}} \cdot v_0).$$

Mişcarea ascendentă este soluție a problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\mu}{g}} \cdot v_0 - \sqrt{\mu \cdot g} \cdot t) \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

Fie prin calcul direct, fie utilizând un program de calcul al primitivelor (noi am utilizat programul MAPLE 11) deducem

$$x(t)=\frac{1}{2\cdot\mu}\ln\frac{(1+\sqrt{\frac{\mu}{g}}\cdot v_0\cdot \mathrm{tg}(\sqrt{\mu\cdot g}\cdot t))^2}{1+\mathrm{tg}^2(\sqrt{\mu\cdot g}\cdot t)}.$$

Înălțimea maximă la care ajunge corpul este

$$H_{\max}=x(T_u)=\frac{1}{2\cdot\mu}\ln(1+\frac{\mu\cdot {v_0}^2}{g}).$$

B 2. Mişcarea descendentă

Pentru un timp *t* superior lui T_u viteza corpului este soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases}\dot v=-g+\mu\cdot v^2,\\ v(T_u)=0.\end{cases}$$

Ecuația diferențială poate fi tratată fie ca o *ecuație cu variabile separabile*, fie ca o *ecuație Riccati*. Soluția problemei Cauchy este:

$$v(t)=\sqrt{\frac{g}{\mu}}\cdot\frac{1-\exp(2\cdot\sqrt{\mu\cdot g}\cdot(t-T_u))}{1+\exp(2\cdot\sqrt{\mu\cdot g}\cdot(t-T_u))}.$$

Mişcarea descendentă a corpului este modelată de problema Cauchy

$$\dot x=\sqrt{\frac{g}{\mu}}\cdot\frac{1-\exp(2\cdot\sqrt{\mu\cdot g}\cdot(t-T_u))}{1+\exp(2\cdot\sqrt{\mu\cdot g}\cdot(t-T_u))},$$
$$x(T_u=H_{\max})$$

a cărei soluție este

$$x(t)=\sqrt{\frac{g}{\mu}}\cdot(t-T_u)+\frac{1}{\mu}\cdot\ln\frac{2\sqrt{1+\frac{\mu\cdot {v_0}^2}{g}}}{1+\exp(2\cdot\sqrt{\mu\cdot g}\cdot(t-T_u))}.$$

Expresiile mişcării şi ale vitezei au relevanță fizică atât timp cât corpul se află în aer, adică atât timp cât *x* este pozitiv. Egalând pe *x* cu *0* determinăm timpul de coborâre al corpului

$$T_c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot g}} \ln(\sqrt{1+\frac{\mu \cdot v_0{}^2}{g}} + \sqrt{\frac{\mu \cdot v_0{}^2}{g}})$$

Introducând această expresie în formula vitezei găsim viteza de cădere pe suprafața Pământului

$$v_P = \frac{\frac{\mu \cdot v_0{}^2}{g} + \sqrt{\frac{\mu \cdot v_0{}^2}{g} \cdot (1+\frac{\mu \cdot v_0{}^2}{g})}}{\sqrt{\frac{\mu}{g}} \cdot (1+\frac{\mu \cdot v_0{}^2}{g} + \sqrt{\frac{\mu \cdot v_0{}^2}{g} (1+\frac{\mu \cdot v_0{}^2}{g})})}.$$

Interpretare fizică.

Analizând matematic expresiile mişcării şi vitezei atât în mişcare ascendentă cât şi în mişcare descendentă deducem următoarele:

- aerul are un rol “nivelator” ceea ce poate fi evidențiat de următorul rezultat:

$$v(t) \underset{t\to\infty}{\to} \sqrt{\frac{g}{\mu}};$$

- timpul de coborâre T_c este mai mare decât timpul de urcare T_u;
- viteza de cădere pe Pământ v_P este mai mică decât viteza de aruncare v_0.

În figurile 1.5.2 şi 1.5.3 sunt prezentate simulările numerice ale evoluției vitezei şi a mişcării corpului pentru o viteză inițială $v_0 = 150\, m/s$ şi pentru un coeficient de frecare cu aerul $\mu = 0,01 m^{-1}$.

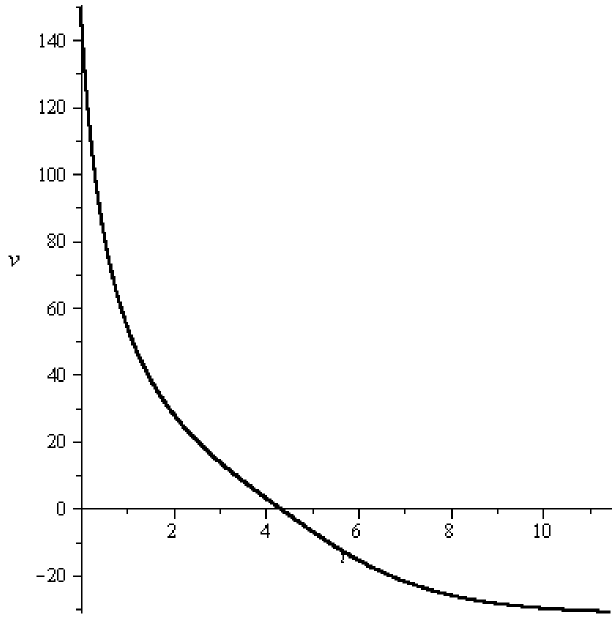


Figura 1.5.2. Evoluția vitezei în mişcarea pe verticală sub acțiunea greutății şi a forței de frecare cu aerul

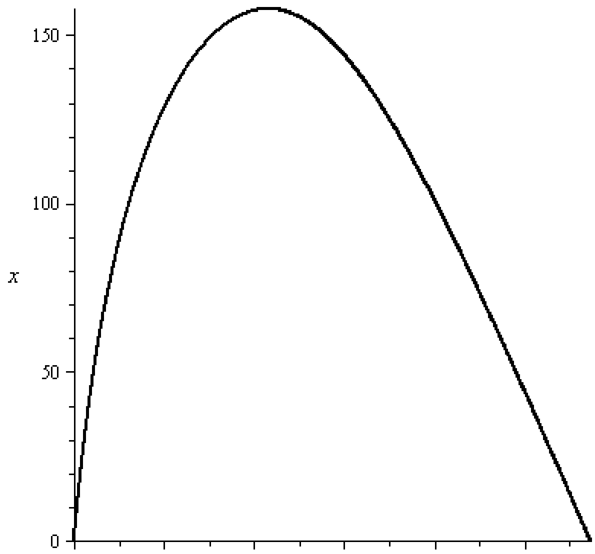


Figura 1.5.3. Mişcarea pe verticală sub acțiunea greutății şi a forței de frecare cu aerul

Valorile numerice pentru înălțimea maximă şi pentru timpii de urcare şi coborâre sunt date în următorul tabel:

$H_{\max}$ (metri)	157,4
T_u (secunde)	4,3
T_c (secunde)	7,1

EFECTUL FRECĂRII CU AERUL

Analizând matematic funcțiile ce descriu viteza şi mişcarea corpului în cele două modele studiate, cu aceeaşi viteză inițială, observăm următoarele proprietăți:

- corpul se ridică la o înălțime mai mică atunci cînd asupra lui acționează atât greutatea cât şi forța de frecare cu aerul;
- timpul de urcare "în aer" este mai scurt decât timpul de urcare "în vid" (atunci când se ține cont doar de greutate);
- timpul de coborâre "în aer" este mai scurt decât cel "în vid";
- viteza de cădere pe suprafața terestră este mai mică "în aer" decât "în vid";
- în figura 1.5.4 sunt prezentate simulările numerice ale vitezei corpului cu valorile constantelor din secțiunile precedente; cu culoarea gri "în vid" şi cu culoarea neagră "în aer".

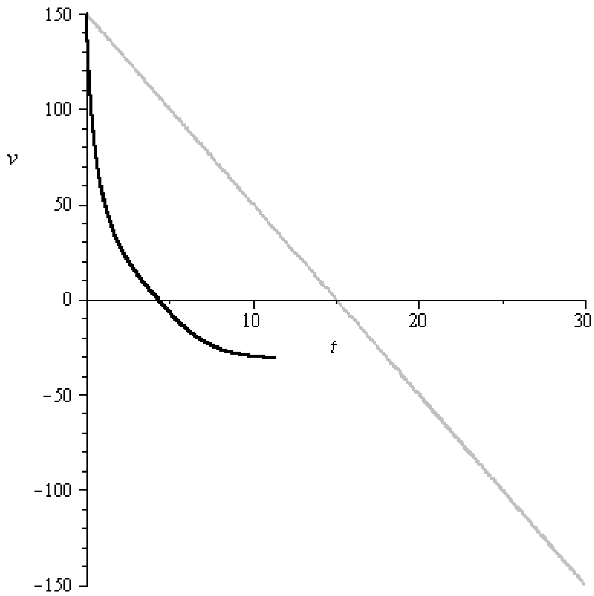


Figura 1.5.4. Efectul frecării cu aerul asupra vitezei

- în figura 1.5.5 sunt prezentate simulările numerice ale mişcării corpului cu valorile constantelor din secțiunile precedente; cu culoarea gri "în vid" şi cu culoarea neagră "în aer".

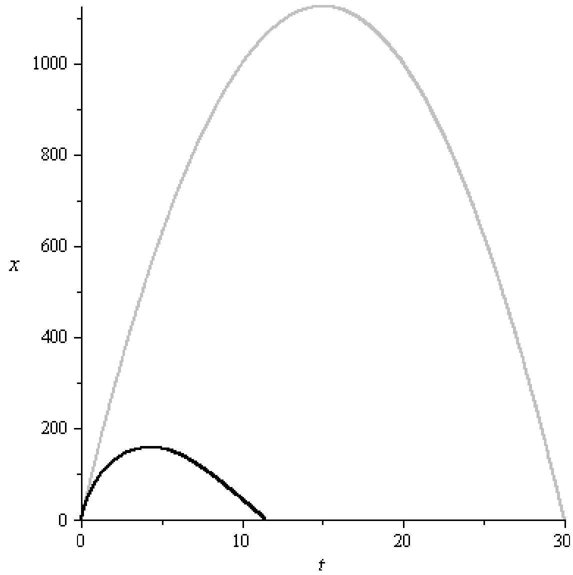


Figura 1.5.5. Efectul frecării cu aerul asupra mişcării

Aplicația 1.5.2. Golirea rezervoarelor (D. Comănescu, I. Caşu)

Problema fizică. Un rezervor cilindric de rază *R* ce conține o cantitate de lichid este golit printr-un orificiu de arie *S* aflat la baza acestuia. Rezervorul poate fi alimentat printr-un robinet. Ne interesează evoluția în timp a volumului de lichid *V(t)* din rezervor. Pentru deducerea modelului matematic utilizăm următoarea lege de bilanț: "variația masei din rezervor este egală cu diferența dintre masa de lichid ce intră prin robinet în unitatea de timp şi masa de lichid ce iese prin orificiu în unitatea de timp". În cele ce urmează vom presupune că masa de lichid ce intră prin robinet pe unitatea de timp este constantă şi o vom nota k_0. Masa de lichid ce iese prin orificiu în unitatea de timp este egală cu $k_2 \cdot \rho \cdot S \cdot w$ unde am notat cu ρ densitatea lichidului, cu $w(t)$ mărimea vitezei unei particule de lichid situată pe suprafața *S* a orificiului şi cu k_2 coeficientul, determinat experimental, care exprimă procentul din aria *S* a orificiului prin care iese

efectiv lichidul. Pe baza celor de mai sus şi notând cu *m(t)* masa de lichid din rezervor putem scrie

$$\dot{m} = k_0 - k_2 \cdot \rho \cdot S \cdot w .$$

Înlocuind masa cu volumul şi notând $k_1 = \frac{k_0}{\rho}$ obținem

$$\dot{V} = k_1 - k_2 \cdot S \cdot w$$

Viteza *w* de evacuare a lichidului prin orificiu este dată de Legea lui Torricelli, care este o consecintă a unei legi mai generale date de Bernoulli. Aceasta afirmă că viteza de scurgere a lichidului din rezervor este $\sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}$, unde g este accelerația gravitațională, iar *h(t)* este înălțimea coloanei de lichid deasupra orificiului. Sintetizând, putem scrie

$$\dot{V}(t) = k_1 - k_2 \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)} .$$

Din formula volumului cilindrului deducem că

$$h(t) = \frac{V(t)}{\pi \cdot R^2} .$$

Înlocuind în ecuația diferențială precedentă găsim ecuația diferențială a evoluției volumului de lichid

$$\dot{V} = k_1 - k_3 \cdot \frac{S}{R} \cdot V^{\frac{1}{2}} ,$$

unde am notat $k_3 = k_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\pi}}$. Ecuația de mai sus este o ecuație diferențială cu variabile separabile. Dacă robinetul de alimentare este închis, $k_1 = 0$, atunci ecuația diferențială poate fi privită şi ca o *ecuație Bernoulli* (vezi § 1.3.7). Notând volumul inițial de lichid cu V_0, evoluția volumului de lichid este soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{V} = k_1 - k_3 \cdot \dfrac{S}{R} \cdot V^{\frac{1}{2}} \\ V(0) = V_0 \end{cases}.$$

CAZUL ÎN CARE ROBINETUL DE ALIMENTARE ESTE ÎNCHIS $k_1 = 0$

Problema Cauchy devine

$$\begin{cases} \dot{V} = -k_3 \cdot \dfrac{S}{R} \cdot V^{\frac{1}{2}} \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

şi are soluția:

$$V(t) = \frac{(k_3 \cdot S \cdot t - 2 \cdot R \cdot \sqrt{V_0})^2}{4 \cdot R^2}.$$

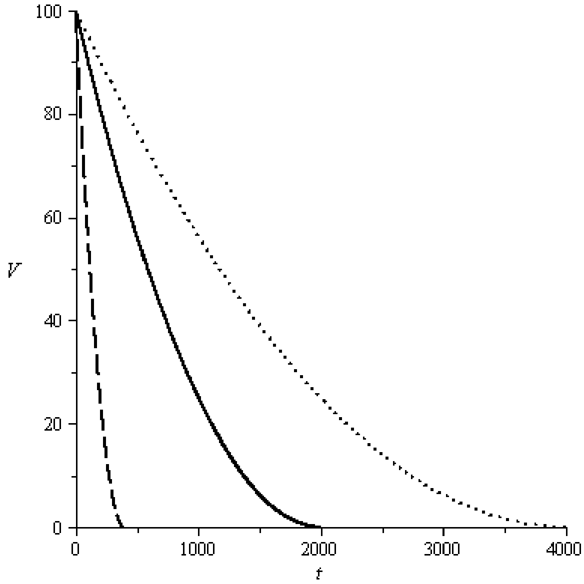


Figura 1.5.6. Evoluția volumului de lichid pentru diverse arii ale orificiului.

În figura 1.5.6 este prezentată simularea evoluției volumului de lichid pentru următoarele valori ale parametrilor şi condiției inițiale: $V_0 = 100\,m^3,\ R = 1m,\ k_3 = 0{,}1 m^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1}$. Cu linie punctată avem evoluția volumului

lichidului atunci când $S = 0,05m^2$, cu linie continuă atunci când $S = 0,1m^2$ şi cu linie întreruptă atunci când $S = 0,5m^2$.

Deşi soluţia problemei Cauchy este globală (definită pe $\Re$), relevanţa fizică a acesteia este pe intervalul de timp $[0,T_G]$ unde T_G este timpul de golire al rezervorului şi are expresia $T_G = \frac{2\cdot R\cdot\sqrt{V_0}}{k_3\cdot S}$. Această expresie ne ajută la rezolvarea unor probleme practice de următorul tip: "determinarea ariei orificiului pentru ca timpul de golire să se încadreze între anumite limite date în prealabil".

CAZUL GENERAL

Pentru a simplifica studiul facem schimbarea de variabilă $W = \frac{V}{k_1}$ unde W este volumul de lichid *normalizat* şi introducem notaţiile $W_0 = \frac{V_0}{k_1}$ şi $a = \frac{k_3\cdot S}{\sqrt{k_1}\cdot R}$. Cu aceste notaţii problema Cauchy a evoluţiei volumui de lichid din rezervor devine

$$\begin{cases} \dot{W} = 1 - a\cdot W^{\frac{1}{2}} \\ W(0) = W_0 \end{cases}.$$

Expresia explicită a soluţiei este imposibil de obţinut prin funcţii elementare. Fie prin calcul direct fie cu ajutorul unui program de calcul simbolic cum ar fi MAPLE 11 se poate da soluţia în formă implicită. Expresia acestei este complicată şi nu o vom prezenta în această lucrare.

Pentru a sesiza comportarea volumui de lichid din rezervor preferăm să prezentăm soluţia problemei Cauchy pentru valori particulare ale parametrului a şi a condiţiei iniţiale W_0. Mai precis vom considera $a = 2,\ W_0 = 1$. Soluţia implicită a problemei Cauchy este

$2\cdot\sqrt{W}+\ln|2\cdot\sqrt{W}-1|=2-2\cdot t$ .Făcând o analiză matematică detaliată a soluției sau urmărind simularea din figura 1.5.7 observăm că volumul de lichid scade tinzând spre o valoare strict pozitivă atunci când $t\to\infty$.

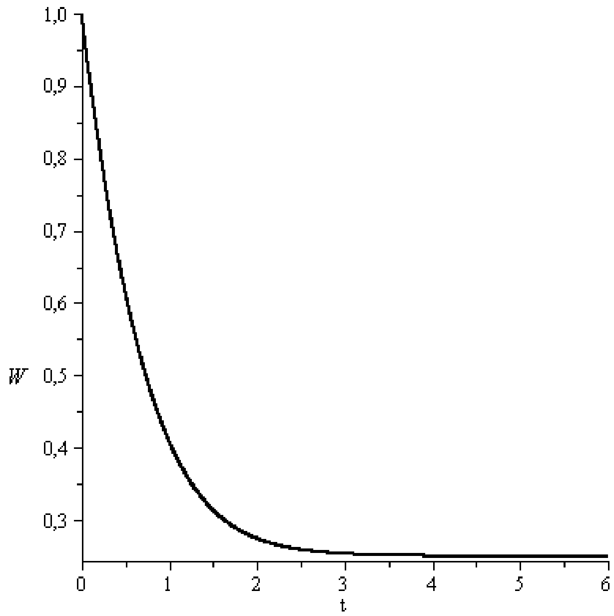


Figura 1.5.7. Evoluția volumului de lichid normalizat.

În general se observă că dacă este satisfăcută relația $W_0=\frac{1}{a^2}$, atunci funcția *W* este constantă ceea ce arată că volumul de lichid rămâne tot timpul constant. Dacă $W_0>\frac{1}{a^2}$, atunci *W* este o funcție descrescătoare şi $\lim_{t\to\infty}W(t)=\frac{1}{a^2}$; deducem că volumul de lichid scade şi tinde spre o valoare strict pozitivă (această situație este prezentată în simularea de mai sus). Dacă $W_0<\frac{1}{a^2}$, atunci *W* este o funcție crescătoare şi $\lim_{t\to\infty}W(t)=\frac{1}{a^2}$; deducem că volumul de lichid creşte şi tinde spre o valoare strict pozitivă.

Aplicația 1.5.3. (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Să se determine funcția de eforturi (efortul meridian) pentru plăcile curbe subțiri de rotație. Cazuri particulare: cupola sferică şi cupola parabolică.

Model matematic. În cadrul teoriei membranei se stabileşte următoarea ecuație diferențială ordinară, pe care o satisface funcția de eforturi $U = U(\varphi)$ (efortul meridian)

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varphi} + \left(\frac{1}{r_0}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\varphi} - \cot\varphi\right)U - \frac{n}{\cos\varphi}\frac{1}{r_0}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\varphi}U^2 + \frac{n}{\sin\varphi} = 0; \tag{1.5.1}$$

în (1.5.1), φ este unghiul meridian (variabila independentă), $r_0 = r_0(\varphi)$ este raza cercului paralel al suprafeței meridiane (de rotație), iar $n \geq 2$ este un număr întreg.

Soluție. Ecuația (1.5.1) este de tip Riccati şi o putem rezolva prin cuadraturi dacă i se cunoaşte o soluție particulară (vezi § 1.3.8). O asemenea soluție poate fi găsită în cazurile particulare din enunț.

A. **CUPOLA SFERICĂ**. În acest caz, notând cu *a* raza suprafeței meridiane sferice, rezultă $r_0 = a\sin\varphi$, deci $(1/r_0)\mathrm{d}r_0/\mathrm{d}\varphi = \cot\varphi$. Ecuația (1.5.1) ia forma mai simplă

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{n}{\sin\varphi}\left(1 - U^2\right) = 0. \tag{1.5.2}$$

Putem scrie această ecuație sub forma

$$\frac{\mathrm{d}U}{1 - U^2} + \frac{n\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} = 0; \tag{1.5.3}$$

aceasta este o ecuație cu variabile separate, a cărei soluție este (vezi §1.3.1)

$$U = \frac{C + \tan^{2n}\frac{\varphi}{2}}{C - \tan^{2n}\frac{\varphi}{2}}, \tag{1.5.4}$$

unde *C* este o constantă de integrare.

A. **CUPOLA PARABOLICĂ**. Dacă a este raza de curbură la creştetul paraboloidului, avem $r_0 = a\tan\varphi$ şi $\mathrm{d}r_0 \big/ \mathrm{d}\varphi = a\big/\cos^2\varphi$, astfel încât ecuația (1.5.1) devine

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varphi} + U\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{n}{\sin\varphi\cos^2\varphi}U^2 + \frac{n}{\sin\varphi} = 0. \tag{1.5.5}$$

Ea mai poate fi scrisă sub forma

$$\cos\varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{U}{\cos\varphi}\right) + \frac{n}{\sin\varphi}\left(1 - \frac{U^2}{\cos^2\varphi}\right) = 0, \tag{1.5.6}$$

ceea ce sugerează două soluții particulare $U_1, U_2 = \pm\cos\varphi$.

Din acest punct sunt posibile două moduri de rezolvare:

i) Introducem notația $v = U/\cos\varphi$ şi ecuația (1.5.6) devine

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{n}{\cos\varphi\sin\varphi}\left(1 - v^2\right) = 0, \tag{1.5.7}$$

care este o ecuație cu variabile separabile, de acelaşi tip ca (1.5.2).

Putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}v}{1 - v^2} = -\frac{2n\,\mathrm{d}\varphi}{\sin 2\varphi},$$

de unde

$$v = \frac{c + \tan^{2n}\varphi}{c - \tan^{2n}\varphi};$$

în final, avem

$$U = \cos\varphi\frac{c + \tan^{2n}\varphi}{c - \tan^{2n}\varphi}, \tag{1.5.8}$$

unde c este o constantă arbitrară.

ii) O altă posibilitate, care duce însă la calcule mai complicate, este aceea de a folosi faptul că ecuația (1.5.6) este de tip Riccati şi îi cunoaştem două soluții particulare. Aplicându-i schimbarea de funcție

$$U = v + \cos\varphi, \tag{1.5.9}$$

obținem

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} + v\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{2n}{\sin\varphi\cos\varphi}\right) - \frac{n}{\sin\varphi\cos^2\varphi}v^2 = 0, \tag{1.5.10}$$

deci o ecuație de tip Bernoulli, cu $\alpha = 2$ (vezi § 1.3.7). Notând $z = 1/v$, rezultă pentru noua funcție necunoscută z ecuația lineară neomogenă de ordinul I

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} + z\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{2n}{\sin\varphi\cos\varphi}\right) - \frac{n}{\sin\varphi\cos^2\varphi} = 0, \tag{1.5.11}$$

care poate fi rezolvată cu metoda prezentată în § 1.3.6. Soluția generală a ecuației omogene asociate este

$$z_0 = \frac{c}{\cos\varphi}(\tan\varphi)^{-2n},$$

iar o soluție particulară a ecuației neomogene se poate determina folosind metoda variației constantelor. Obținem în final

$$z = \frac{c}{\cos\varphi}(\tan\varphi)^{-2n} - \frac{1}{2\cos\varphi}.$$

Revenind la v şi apoi la U, deducem

$$\begin{aligned} U &= \frac{\cos\varphi}{c(\tan\varphi)^{-2n} - \frac{1}{2}} + \cos\varphi = \cos\varphi\left[\frac{c(\tan\varphi)^{-2n} + \frac{1}{2}}{c(\tan\varphi)^{-2n} - \frac{1}{2}}\right] = \\ &= \cos\varphi\frac{K + (\tan\varphi)^{2n}}{K - (\tan\varphi)^{2n}}, \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

unde am notat $K = 1/2c$. Se vede cu uşurinţă ca formele (1.5.8) şi (1.5.12) ale soluției sunt identice.

Observație. O posibilitate de a integra ecuația (1.5.1) apare atunci când coeficienții satisfac condiția (1.3.122), adică

$$\frac{1}{r_0}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\varphi} - \cot\varphi - \frac{n}{\cos\varphi}\frac{1}{r_0}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{n}{\sin\varphi} = 0, \tag{1.5.13}$$

de unde rezultă

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\varphi}}{r_0} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{1.5.14}$$

După cum se vede, această condiție este satisfăcută pentru cupola sferică $(r_0 = a\sin\varphi)$.

În cazul mai general (1.3.124), ecuația Riccati poate fi integrată dacă există două constante *a*, *b*, care să nu fie simultan nule, astfel încât

$$a^2\frac{n}{\cos\varphi}\frac{1}{r_0}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\varphi} + ab\left(-\frac{1}{r_0}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\varphi} + \cot\varphi\right) - b^2\frac{n}{\sin\varphi} = 0, \tag{1.5.15}$$

ceea ce revine la

$$\frac{1}{r_0}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\varphi} = \cot\varphi\frac{b^2 n - ab\cos\varphi}{a^2 n - ab\cos\varphi}. \tag{1.5.16}$$

Aplicația 1.5.4. Mişcarea unei rachete printr-un nor de praf cosmic (D. Comănescu, I. Caşu)

Problema fizică. O rachetă cu masa constantă *m* se mişcă, în urma unui impuls inițial, printr-un nor de praf cosmic. Acesta acționează asupra rachetei cu o forță de frecare $\vec{F}_f$. Pe baza datelor experimentale s-a ajuns la concluzia că forța de frecare este de forma

$$\vec{F}_f = -\mu(\|\vec{v}\|)\vec{v}$$

unde $\vec{v}$ este viteza, iar $\mu:[0,\infty)\to[0,\infty)$ este o funcție continuă. Datorită simetriei problemei, mişcările rachetei cu un impuls inițial sunt rectilinii. Alegem o astfel de mişcare a rachetei şi un reper cu originea în poziția inițială a rachetei şi cu sensul pozitiv dat de viteza inițială a acesteia. Notăm cu v componenta vitezei pe axa de mişcare şi cu v_0 viteza inițială. Pe baza teoremei impulsului, a expresiei forței de frecare şi a alegerii reperului se obține modelul matematic al evoluției vitezei rachetei

$$\begin{cases} m\cdot\dot{v} = -\mu(v)\cdot v \\ v(0) = v_0 \end{cases}.$$

Odată determinată viteza v a rachetei se poate determina mişcarea acesteia ca soluție a problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

a) Cazul frecării liniare

În situația în care norul de praf cosmic este rarefiat forța de frecare poate fi bine aproximată printr-o funcție liniară; adică funcția μ este constantă. Introducem notația $\mu_0 = \dfrac{\mu}{m}$. Evoluția vitezei rachetei capătă forma

$$\begin{cases} \dot{v} = -\mu_0\cdot v \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Avem o problemă Cauchy pentru o ecuație diferențială liniară a cărei soluție este (vezi § 1.3.6)

$$v(t) = v_0\cdot\exp(-\mu_0\cdot t).$$

În figura 1.5.8 este prezentată simularea vitezei rachetei pentru o viteză iniţială egală cu $1000\,m/s$, coeficient de frecare μ egal cu $0,001 s^{-1}$ şi masa egală cu $1000\,kg$.

Mişcarea rachetei este soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cdot \exp(-\mu_0 \cdot t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

care are expresia (vezi § 1.3.6)

$$x(t) = \frac{v_0}{\mu_0} \cdot (1 - \exp(-\mu_0 \cdot t))$$

.

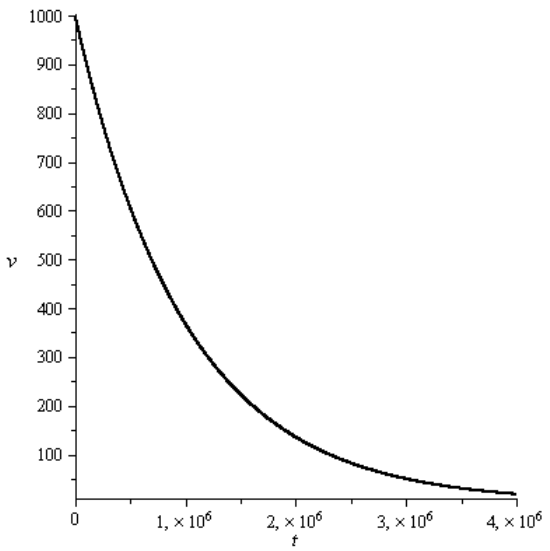


Figura 1.5.8. Viteza rachetei în cazul frecării liniare

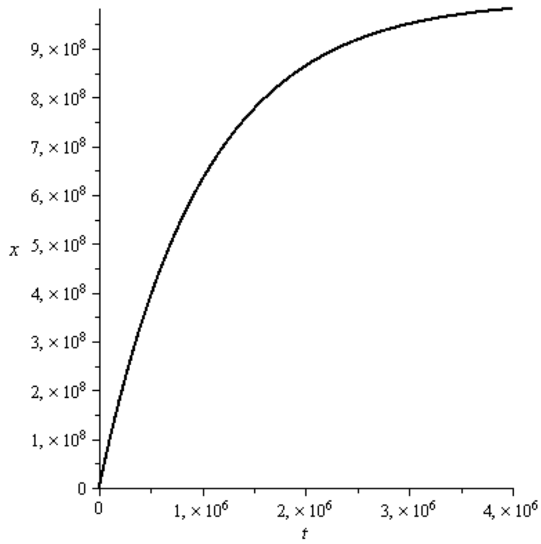


Figura 1.5.9. Mişcarea rachetei în cazul frecării liniare

Interpretare fizică. În figura 1.5.9 este prezentată simularea mişcării rachetei pentru valorile parametrilor şi condiţiei iniţiale considerate mai sus.

Analizând expresiile vitezei şi mişcării remarcăm următoarele:

♣ viteza este descrescătoare tinzând spre 0 când $t \to \infty$;

♣ mişcarea este o funcție mărginită ceea ce demonstrează că racheta nu poate ajunge, în condițiile date, mai departe de o distanță maximă egală cu $\frac{v_0}{\mu_0}$.

b) Cazul frecării neliniare de forma $\mu(v) = \mu_0 \cdot v^{\alpha}$**,** $\alpha > 0, \mu_0 > 0$

Observații experimentale au condus la modele matematice ale frecării de forma prezentată în această secțiune. Evoluția vitezei rachetei capătă forma

$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{\mu_0}{m} \cdot v^{\alpha+1} \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Avem o problemă Cauchy pentru o ecuație diferențială cu variabile separabile a cărei soluție este

$$v(t) = (v_0^{-\alpha} + \frac{\mu_0}{m} \cdot \alpha \cdot t)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

În condițiile acestui caz observăm că $v(t) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} 0$. Pentru determinarea mişcării rachetei trebuie să analizăm două situații.

b1) $\alpha = 1$**.**

Printr-o integrare directă deducem că mişcarea rachetei este

$$x(t) = \frac{m}{\mu_0} \cdot \ln(\frac{\mu_0 \cdot v_0}{m} \cdot t + 1).$$

b2) $\alpha \neq 1$**.**

Mişcarea rachetei este dată de

$$x(t) = \frac{m}{\mu_0 \cdot (\alpha - 1)} \cdot (\frac{\mu_0 \cdot \alpha}{m} \cdot t + v_0^{-\alpha})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \frac{m}{\mu_0 \cdot (1-\alpha)} \cdot v_0^{1-\alpha}.$$

Interpretare fizică. Analizând expresiile mişcării rachetei observăm că mişcarea este mărginită dacă $\alpha < 1$ şi nemărginită dacă $\alpha \geq 1$.

În figurile 1.5.10–1.5.15 prezentăm simulări numerice ale vitezei şi mişcării rachetei în cazurile $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ şi respectiv $\alpha = 1$.

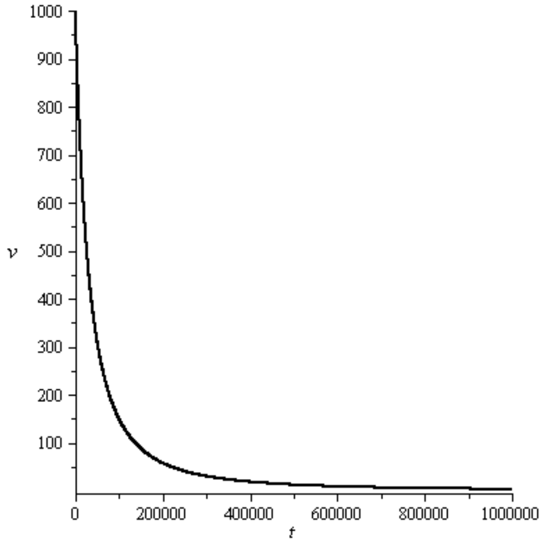


Figura 1.5.10. Viteza rachetei în cazul frecării neliniare cu $\alpha < 1$

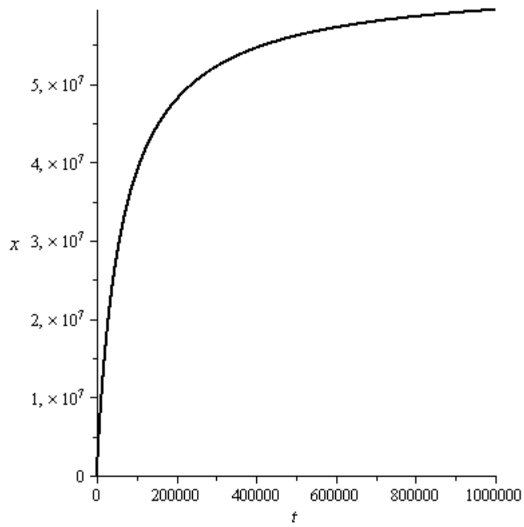


Figura 1.5.11. Mişcarea rachetei în cazul frecării neliniare cu $\alpha < 1$

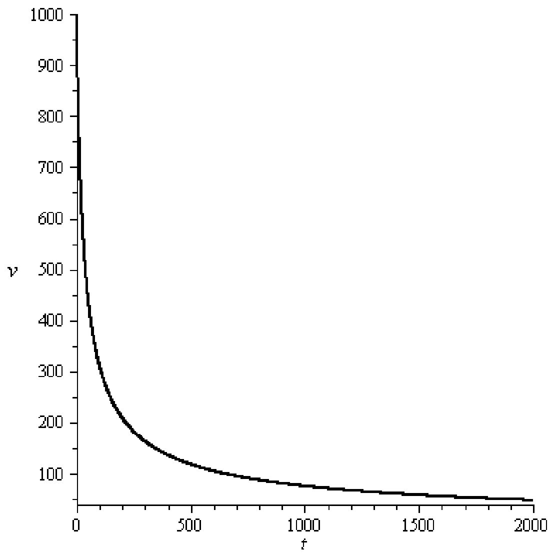


Figura1.5.12. Viteza rachetei în cazul frecării neliniare cu $\alpha > 1$

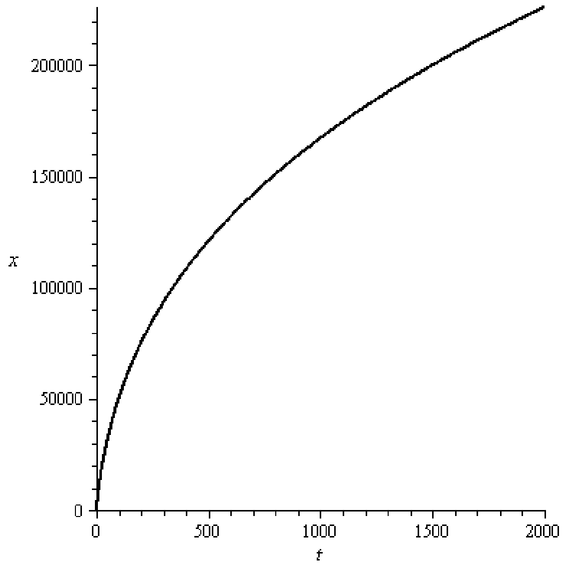


Figura 1.5.13. Mişcarea rachetei în cazul frecării neliniare cu $\alpha > 1$

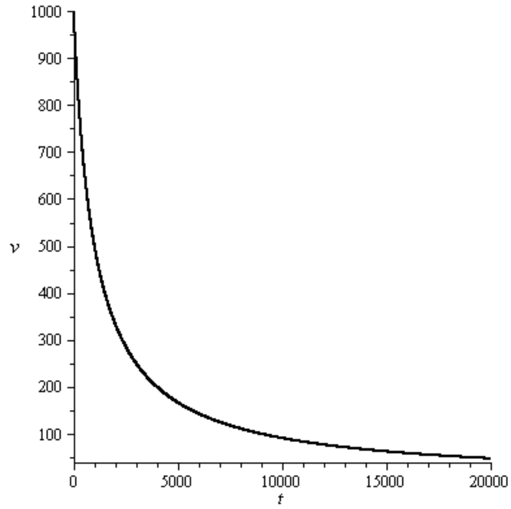


Figura 1.5.14. Viteza rachetei în cazul frecării neliniare cu $\alpha = 1$

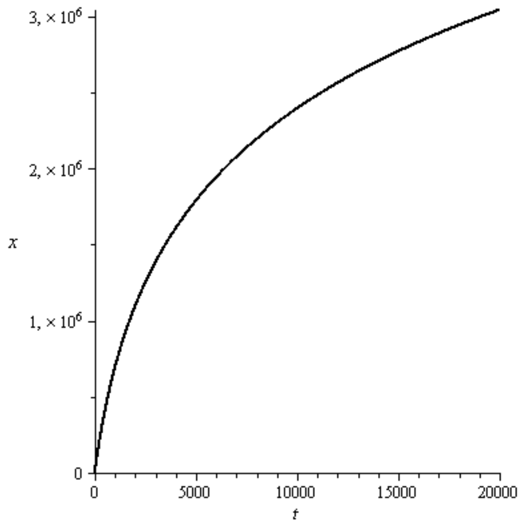


Figura 1.5.15. Mişcarea rachetei în cazul frecării neliniare cu $\alpha = 1$

În toate simulările făcute am utilizat următoarele valori ale parametrilor şi condiției inițiale: $m = 1000\,kg$, $\mu_0 = 0,001 kg \cdot m^{-\alpha} \cdot s^{\alpha-1}$ şi $v_0 = 1000\, m/s$.

Aplicația 1.5.5 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică (***problema lui Cayley, 1857***). Să se studieze mişcarea unui unui corp solid de greutate P_0, care se deplasează pe un plan înclinat cu unghiul α, fiind legat de un lanț înfăşurat fără frecare în A (figura 1.5.16).

Model matematic. Aplicând teorema momentului, se obține ecuația diferențială de ordinul I

$$\frac{P}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{p}{g}(v - v_0) = X, \tag{1.5.17}$$

în care P/g este masa totală a sistemului mecanic la momentul *t*, *g* fiind accelerația gravitației, p/g este acumularea de masă, *X* este forța exterioară, *v* – viteza la

momentul t, iar v_0 este viteza inițială a masei adiționale. Ecuația (1.5.17) reprezintă modelul unui sistem mecanic de masă variabilă.

Fie q greutatea lanțului pe unitatea de lungime; în acest caz, pentru orice deplasare x a greutății P_0, masa totală în mişcare va fi

$$P = P_0 + qx. \tag{1.5.18}$$

Observăm că

$$p = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = qv. \tag{1.5.19}$$

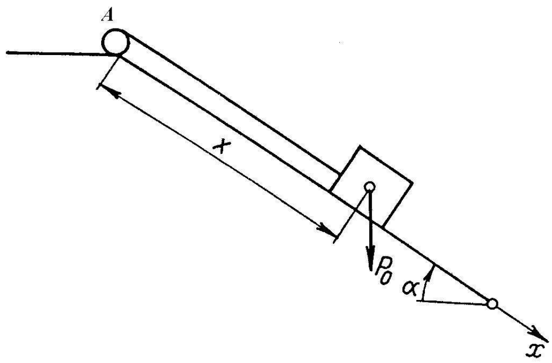


Figura 1.5.16. Sistem mecanic de masă variabilă

Porțiunea înfăşurată a lanțului fiind în repaus, putem considera că viteza inițială a masei adiționale este nulă ($v_0 = 0$).

Forța exterioară X este componenta după direcția planului înclinat a forței P, aşa încât $X = (P_0 + qx)\sin\alpha$.

În felul acesta, ecuația (1.5.17) capătă forma

$$\frac{1}{g}\left(P\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right) = (P_0 + qx)\sin\alpha.$$

Soluție. Ecuația care guvernează fenomenul este deci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Pv) = Pg\sin\alpha = (P_0 + qx)g\sin\alpha\,. \qquad (1.5.20)$$

Înmulțind la stânga cu Pv şi la dreapta cu $(P_0 + qx)\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ şi apoi integrând, găsim

$$\frac{1}{2}(Pv)^2 = \frac{g}{3q}(P_0 + qx)^3\sin\alpha + C. \qquad (1.5.21)$$

Interpretare fizică. Dacă admitem că pentru $t = 0$ sistemul mecanic este în repaus la partea superioară a planului înclinat, atunci, din condiția $x(0) = 0$, rezultă că $C = -(g/3q)P_0{}^3\sin\alpha$, iar pătratul vitezei este dat de

$$v^2 = \frac{2g}{3q}\frac{(P_0 + qx)^3 - P_0^3}{(P_0 + qx)^2}\sin\alpha = \frac{2gx}{3}\frac{3P_0(P_0 + qx) + q^2x^2}{(P_0 + qx)^2}\sin\alpha\ . \qquad (1.5.22)$$

În cazul particular $P_0 = 0$ (lanțul cade liber), se obține

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2gx}{3}\sin\alpha\,, \qquad (1.5.23)$$

de unde

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2g}{3}\sin\alpha}\,\mathrm{d}t\ ;$$

apoi

$$\sqrt{6x} = \sqrt{g\sin\alpha}\,t + C_1\ ,$$

aşa încât ($x(0) = 0$)

$$x(t) = \frac{g}{6}t^2\sin\alpha\,, \quad v(t) = \frac{g}{3}t\sin\alpha\,, \quad a(t) = \frac{g}{3}\sin\alpha, \qquad (1.5.24)$$

mişcarea elementelor lanțului fiind *uniform accelerată*.

Aplicaţia 1.5.6 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Să se determine forma de echilibru a unui fir elastic suspendat între două puncte, având aria secţiunii A şi modulul de elasticitate al materialului E. Va fi studiat cazul greutăţii proprii a firului *m***g** [68].

Model matematic. Fie S efortul în fir şi componentele sale după axele Ox şi Oy: $S\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}s$, $S\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}s$ respectiv (figura 1.5.17).

În starea deformată a firului, ecuaţiile de proiecţie pe cele două axe dau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(S\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=0, \tag{1.5.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(S\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\left(1+\frac{S}{EA}\right)=g, \tag{1.5.26}$$

unde g este greutatea proprie a firului pe unitatea de lungime (se ia masa egală cu unitatea). Din (1.5.25) rezultă

$$S\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=S_0=\text{const},\; S=S_0\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}, \tag{1.5.27}$$

şi, introducând în (1.5.26), obţinem

$$S_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\left(1+\frac{S_0}{EA}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)=g. \tag{1.5.28}$$

Ţinând seama că $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=y'$, rezultă ecuaţia diferenţială nelineară de ordinul I

$$S_0\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\left(\frac{S_0}{EA}+\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=g. \tag{1.5.29}$$

Soluţie. Notăm $y'=p$ şi considerăm p ca variabilă independentă; obţinem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=\frac{S_0}{g}\left(\frac{S_0}{EA}+\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right). \tag{1.5.30}$$

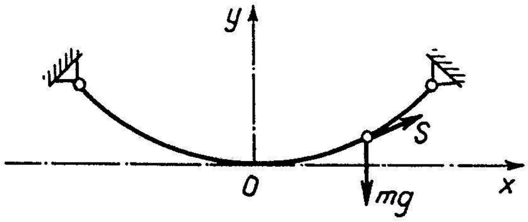


Figura 1.5.17. Deformarea unui fir elastic suspendat între două puncte

Prin integrare rezultă

$$x = \frac{S_0}{g}\left[\frac{S_0}{EA}p + \ln\left(p + \sqrt{p^2 + 1}\right) + C_1\right]. \tag{1.5.31}$$

Deoarece pentru $x = 0$ avem $y' = p = 0$, deducem $C_1 = 0$ şi

$$x = \frac{S_0}{g}\left[\frac{S_0}{EA}p + \ln\left(p + \sqrt{p^2 + 1}\right)\right]. \tag{1.5.32}$$

Dacă înmulțim (1.5.30) cu $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} = \frac{S_0}{g}\left(\frac{S_0}{EA}p + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right). \tag{1.5.33}$$

Prin integrare, deducem

$$y = \frac{S_0}{g}\left(\frac{S_0}{2EA}p^2 + \sqrt{1+p^2} - 1\right) + C_2.$$

Deoarece pentru $y \equiv 0$ avem $y' = p = 0$, rezultă $C_2 = 0$ şi deci

$$y = \frac{S_0}{g}\left(\frac{S_0}{2EA}p^2 + \sqrt{1+p^2} - 1\right). \tag{1.5.34}$$

Relațiile (1.5.32) şi (1.5.34) constituie representarea parametrică a fibrei deformate. Se vede că atunci când $EA \to \infty$ (cazul firului inextensibil) se regăseşte ecuația lănțişorului.

Efortul S_0 poate fi determinat dintr-o condiție geometrică legată de lungimea totală a firului.

Aplicația 1.5.7 (M.V.Soare, [19,20])

Problemă. Considerăm starea de eforturi de membrană simetrică intr-o placă subțire de rotație, supusă la o încărcare exterioară de componente Y după tangenta la meridian, respectiv Z, după normala la suprafața mediană. şe cer expresiile generale ale eforturilor meridiane şi inelare N_φ, N_θ (figura 1.5.18).

Model matematic. Ecuațiile de echilibru unui element de placă sunt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(N_\varphi r_0\right) - N_\theta r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0, \tag{1.5.35}$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + Z = 0. \tag{1.5.36}$$

Variabila independentă a problemei este unghiul meridian φ, măsurat în sens direct orar de la creştet, θ fiind unghiul de-a lungul cercului paralel. Alte mărimi fizice implicate în model sunt: raza r_0 a cercului paralel, raza de curbură $r_1 = (1/\cos\varphi)(\mathrm{d}r_0/\mathrm{d}\varphi)$ a curbei meridiane (prima rază de curbură principală a suprafeței mediane şi $r_2 = r_0/\sin\varphi$ – a doua rază de curbură principală a suprafeței mediane.

Soluție. Deoarece ecuația (1.5.36) este algebrică, avem de fapt o singură ecuație diferențială în N_φ, pe care o obținem eliminând pe N_θ, determinat din (1.5.36) cu expresia

$$N_\theta = -\frac{r_2}{r_1} N_\varphi - Z r_2. \tag{1.5.37}$$

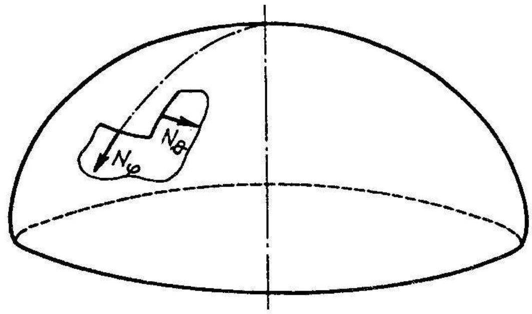


Figura 1. 5. 18. Eforturile de membrană într-o placă subțire de rotație

Introducând în (1.5.35), deducem

$$\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi r_0\right)+N_\varphi r_2\cos\varphi+Yr_0r_1+Zr_1r_2=0\,.$$

Ținând seama de relațiile dintre razele r_2 şi r_0, rezultă

$$\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi r_0\sin\varphi\right)=-\left(Y\sin\varphi+Z\cos\varphi\right)r_0r_1\,.$$

Notând acum $y(\varphi)=N_\varphi r_0\sin\varphi$, obținem pentru y o ecuație diferențială ordinară de ordinul I, lineară şi neomogenă, studiată la § 1.3.6

$$\frac{dy}{d\varphi}=-\left(Y\sin\varphi+Z\cos\varphi\right)r_0r_1. \qquad (1.5.38)$$

Integrând-o, rezultă

$$N_\varphi=-\frac{1}{r_0\sin\varphi}\int\left(Y\sin\varphi+Z\cos\varphi\right)r_0r_1d\varphi+C\,,$$

C fiind o constantă arbitrară.

Efortul inelar se obține direct din (1.5.37)

$$N_\theta=-Zr_2+\frac{1}{r_1\sin^2\varphi}\int\left(Y\sin\varphi+Z\cos\varphi\right)r_0r_1d\varphi-C\frac{r_2}{r_1}.$$

Constanta C poate fi determinată dintr-o condiție impusă la marginea superioară ($\varphi = \varphi_s$), sau la creștet ($\varphi = 0$).

Aplicația 1.5.8 (M.V.Soare, [19,20])

Problemă. Se cere să se determine starea de tensiune normală, ca funcție de timp, pentru un corp Maxwell.

Model matematic. Pentru explicarea relaxării se alcătuieşte modelul Maxwell, prin combinarea unui model Hooke (elastic) şi a unui model Newton (vâscos) (figura 1.5.19, a)). Starea de tensiune rezultă ca o sumă a stărilor de deformație a celor două corpuri; astfel, tensiunea totală $\varepsilon_0 = \text{const}$ este compusă din

- ♣ deformația elastică a arcului, dată de

$$\varepsilon_{\text{elastic}} = \sigma / E, \tag{1.5.39}$$

unde E este modulul longitudinal de elasticitate, şi din

- ♣ deformația vâscoasă, $\varepsilon_{\text{vascos}}$.

Prin urmare (figura 1.5.19, a))

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{\text{vascos}}.$$

Derivând în raport cu timpul t ($\dot{\varepsilon}_0 = 0$), obținem

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_{\text{vascos}} = 0. \tag{1.5.40}$$

Ştiind că pentru corpul Newton subzistă relația

$$\dot{\varepsilon}_{\text{vascos}} = \frac{\sigma}{\eta},$$

în care prin η s-a notat coeficientul de vâscozitate dinamică, care este constant. Astfel, (1.5.40) devine

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma = 0. \tag{1.5.41}$$

Soluția și interpretarea ei fizică. Ecuația diferențială (1.5.41) este lineară și omogenă, adică de tipul celor studiate în § 1.3.6. Separând variabilele, obținem

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta}\mathrm{d}t\,,$$

ceea ce implică

$$\ln|\sigma| = \ln C - \frac{E}{\eta}t,$$

unde C este o constantă arbitrară.

Soluția generală a ecuației (1.5.41) este deci

$$\sigma = C\mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t}.$$

Presupunem îndeplinită condiția inițială

$$\sigma(0) = \sigma_0.$$

Rezultă $C = \sigma_0$. Soluția problemei Cauchy considerate este

$$\sigma = \sigma_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{\eta}t}. \tag{1.5.42}$$

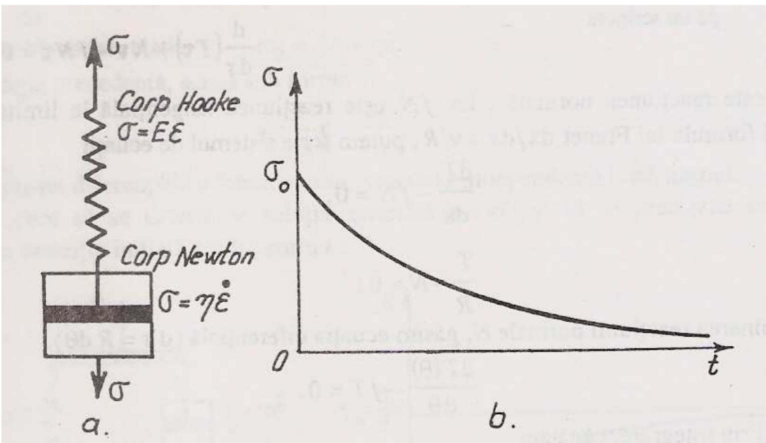


Figura 1. 5.19. a) Modelul Maxwell. b) Variația lui σ *în funcție de t*

Variația lui σ ca funcție de t este dată în figura 1.5.19, b). Graficul reprezintă o exponențială descrescătoare care admite ca asimptotă axa timpului.

Aplicația 1.5.9 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Un fir trece peste un scripete circular fix, de rază R (figura 1.5.20), între fir şi scripete luând naştere o forță de coeficient de frecare de alunecare f. Dacă la una din extremitățile firului P_1 acționează o tensiune $\mathbf{T}_1$, ce tensiune $\mathbf{T}_2$ trebuie să se exercite la cealaltă extremitate P_2 pentru ca firul să înceapă să alunece pe scripete?

Model matematic. deoarece scripetele este rugos, reacțiunea $\mathbf{R}(s)\mathrm{d}s$ asupra unui element de fir va avea pe lângă o componentă normală $\mathbf{N}(s)\mathrm{d}s$ şi una tangențială $\mathbf{\Phi}(s)\mathrm{d}s$, numită forță de frecare de alunecare. Din echilibrul unui element de fir (figura 1.5.21) se obține ecuația vectorială

$$\mathrm{d}\mathbf{T}+\mathbf{R}(s)\mathrm{d}s=\mathbf{0}\,; \qquad (1.5.43)$$

mai putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T\boldsymbol{\tau})-N\boldsymbol{\nu}-fN\boldsymbol{\tau}=\mathbf{0}. \qquad (1.5.44)$$

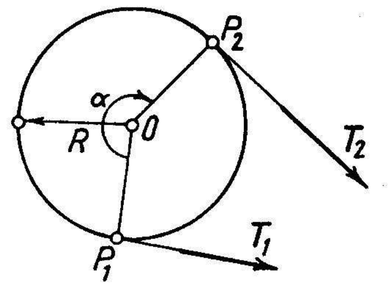


Figura 1.5.20. Echilibrul unui fir pe un scripete

În (1.5.44), N este reacțiunea normală de-a lungul vectorului unitate $\boldsymbol{\nu}$, iar fN este reacțiunea tangențială la limită – de-a lungul vectorului unitate $\boldsymbol{\tau}$.

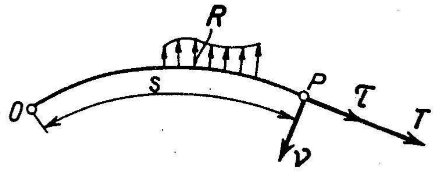


Figura 1. 5.21. Eforturile acționând pe arcul s

În definitiv, utilizând *formula lui Frenet* $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} / \mathrm{d}s = \mathbf{v} / R$, putem scrie sistemul de ecuații care modelează fenomenul

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - fN = 0, \\ &\frac{T}{R} - N = 0. \end{aligned} \tag{1.5.45}$$

Soluție. Eliminând reacțiunea normală *N*, deducem următoarea ecuație diferențială prdinară de ordinul I, lineară şi omogenă ($\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$)

$$\frac{\mathrm{d}T(\theta)}{\mathrm{d}\theta} - fT = 0. \tag{1.5.46}$$

Conform ipotezei, ecuația trebuie integrată cu condiția inițială

$$T(0) = T_1. \tag{1.5.47}$$

Cu metoda de la § 1.3.6, obținem imediat soluția generală a ecuației sub forma

$$T = C\mathrm{e}^{f\theta}, \tag{1.5.48}$$

în care *C* este o constantă arbitrară.

Condiția inițială conduce la determinarea soluției problemei Cauchy (1.5.46), (1.5.47)

$$T = T_1\mathrm{e}^{f\theta}. \tag{1.5.49}$$

Interpretare fizică. Pentru $\theta = \alpha$, putem scrie $T_2 = T_1\mathrm{e}^{f\alpha}$, unde s-au pus în evidență mărimile tensiunilor la capetele firului. Echilibrul poate avea loc şi pentru $T_2 < T_1$; în acest caz, forța de frecare de alunecare îşi schimbă sensul şi rezultă $T_1 = T_2\mathrm{e}^{f\alpha}$.

Se obține astfel ***condiția de echilibru a lui Euler***

$$\mathrm{e}^{-f\alpha} < \frac{T_2}{T_1} < \mathrm{e}^{f\alpha}. \tag{1.5.50}$$

Dacă raportul T_2 / T_1 este în afara acestiu interval, firul începe să alunece.

Aplicația 1.5.10 (M.V.Soare, [19,20])

Problemă. Să se determine starea de deformare $\varepsilon = \varepsilon(t)$ pentru un model Voigt-Kelvin, atât în cazul general, cât şi în cazul particular $\varepsilon(0) = 0$.

Model matematic. pentru explicarea fenomenului de fluaj se construieşte modelul Voigt-Kelvin prin combinarea, în paralel, a unui corp Hooke şi a unui corp Newton (figura 1.5.22 a). Starea de deformație rezultă prin însumarea stărilor de tensiune ale celor două corpuri

$$\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2,$$

în care σ_0 reprezintă tensiunea finală, presupusă cunoscută; $\sigma_1 = E\varepsilon$ corespunde to corpului Hooke, iar $\sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}$ – modelului Newton. În ultimele două relații, E este modulul de elasticitate al materialului (constant), η este coeficientul de vâscozitate dinamică (constant), iar $\dot{\varepsilon} = \mathrm{d}\varepsilon / \mathrm{d}t$ este viteza de deformare.

Rezultă astfel relația $\sigma_0 = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$, care se mai poate scrie sub forma

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta}. \qquad (1.5.51)$$

În consecință, starea de deformare $\varepsilon = \varepsilon(t)$ în cazul unui model Voigt-Kelvin trebuie să satisfacă ecuația diferențială ordinară de ordinul I (1.5.51).

Soluție. Ecuația (1.5.51) este lineară şi neomogenă, de tipul celor studiate la §1.3.6. Ecuația omogenă asociată $\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = 0$ are soluția generală

$$\varepsilon_{\text{homog}} = C\mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t}. \qquad (1.5.52)$$

Deoarece termenul liber este o constantă, putem căuta o soluție particulară a ecuației neomogene direct sub forma unei constante, $\varepsilon_{\text{part}} = K$. Înlocuind în (1.5.51), deducem $\varepsilon_{\text{part}} = \sigma_0 / E$ şi deci soluția generală a ecuației (1.5.51) este

$$\varepsilon(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} + \frac{\sigma_0}{E}. \tag{1.5.53}$$

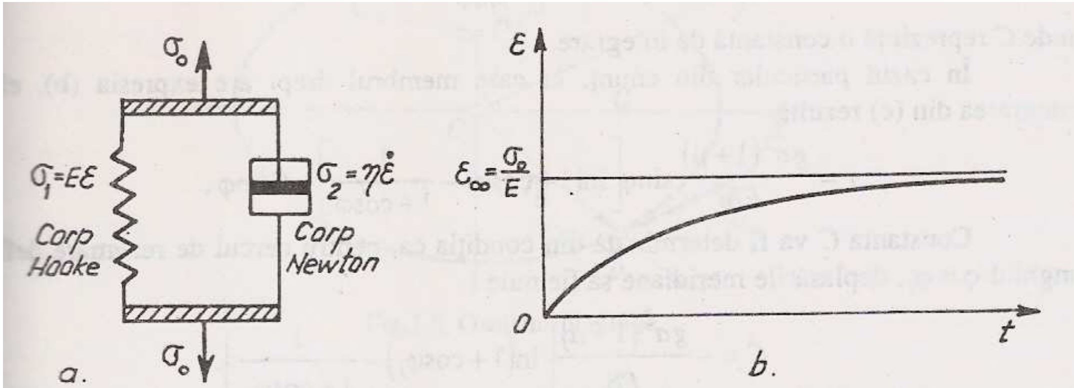


Figura 1.5.22. a) Modelul Voigt-Kelvin. b) Variația lui ε în funcție de t

Aceasta este expresia generală a stării de deformație în cazul unui model Voigt-Kelvin. Pentru a determina soluția care satisface condiția Cauchy nulă, luăm $t = 0$ în (1.5.53); rezultă

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t}\right). \tag{1.5.54}$$

Interpretare fizică. Variația lui ε ca funcție de t este redată în figura 1.5.22 b). Graficul funcției admite o asimptotă $\varepsilon_\infty = \sigma_0 / E$ paralelă cu axa timpului; aceasta înseamnă că deformația se amortizează în timp. Tangenta în origine este $\dot{\varepsilon} = \sigma_0 / \eta$.

Funcția de timp

$$\varphi(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t}$$

se numeşte *funcție de fluaj*.

Aplicația 1.5.11 (M.V.Soare, [19,20])

Problemă. Să se determine deplasările meridiane *w* pentru o placă subțire de rotație. Caz particular: cupola sferică de rază *a*, supusă acțiunii propriei greutăți *g*.

Model matematic. Deplasările meridiane ale unei plăci subțiri de rotație sunt descrise, în teoria de membrană, de ecuația diferențială ordinară (Flügge)

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} - w\cot\varphi = f(\varphi), \tag{1.5.55}$$

unde φ este variabila unghiulară (unghiul meridian) iar $f(\varphi)$ este funcție de încărcarea exterioară.

Soluție. Ecuația (1.5.55) este de ordinul I, lineară şi neomogenă (vezi §1.3.6). Ecuația omogenă asociată

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} - w\cot\varphi = 0, \tag{1.5.56}$$

admite soluția generală

$$w_{\text{homog}} = C\sin\varphi.$$

Determinăm o soluție particulară a ecuației neomogene prin metoda variației constantelor, căutând-o sub forma

$$w_{\text{part}} = C(\varphi)\sin\varphi.$$

Înlocuind în (1.5.55), obținem

$$w_{\text{part}} = \sin\varphi\int\frac{f(\varphi)}{\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

Deci soluția generală a ecuației (1.5.55) este

$$w(\varphi) = \left(C + \int\frac{f(\varphi)}{\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\sin\varphi, \quad C\in\Re. \tag{1.5.57}$$

În cazul cupolei sferice, avem

$$f(\varphi) = \frac{ga^2(1+\nu)}{E\delta}\left(\cos\varphi - \frac{2}{1+\cos\varphi}\right), \qquad (1.5.58)$$

unde E reprezintă modulul elasticității longitudinale, ν este raportul Poisson (coeficientul de contracție transversală a materialului), iar δ este grosimea plăcii, presupusă constantă.

În cazul particular al încărcării (1.5.58), înlocuim direct expresia lui f în (1.5.57). După integrare, obținem expresia

$$w(\varphi) = \frac{ga^2(1+\nu)}{E\delta}\left[\ln(1+\cos\varphi) - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right]\sin\varphi + C\sin\varphi, \quad C \in \Re. \qquad (1.5.59)$$

Determinăm constanta C din condiția ca, pentru cercul de rezemare definit prin unghiul $\varphi = \varphi_i$ deplasările meridiane să fie nule

$$w(\varphi_i) = 0. \qquad (1.5.60)$$

Aceasta este o condiție Cauchy, care, împreună cu ecuația (1.5.55), formează o problemă Cauchy (sau inițială). Deducem

$$C = -\frac{ga^2(1+\nu)}{E\delta}\left[\ln(1+\cos\varphi_i) - \frac{1}{1+\cos\varphi_i}\right]. \qquad (1.5.61)$$

În final, soluția problemei Cauchy capătă forma

$$w(\varphi) = \frac{ga^2(1+\nu)}{E\delta}\left[\ln\frac{1+\cos\varphi}{1+\cos\varphi_i} - \frac{1}{1+\cos\varphi} + \frac{1}{1+\cos\varphi_i}\right]\sin\varphi.$$

Aplicația 1.5.12 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Chiuveta unui lac de acumulare este asimilată cu un paraleliped având aria secțiunii transversale (orizontale) A. Evacuarea apei spre aval se face cu ajutorul unui deversor, debitul acestuia fiind evaluat cu formula $Q_d = Ch^{3/2}$, unde C este o constantă, iar h este sarcina deversorului, definită în schema de calcul din figura

1.5.23. Se cere să se studieze variația în timp a nivelului h al apei din recipient dacă debitul afluent Q_e se prezintă în următoarea variantă (inițial vasul este gol, adică pentru $t = 0$ avem $h = 0$):

$$Q_e = \begin{cases} Q_0 & \text{for } t \in [0, T], \\ 0 & \text{for } t > T, \end{cases}$$

unde Q_0 şi T sunt constante.

Model matematic. Pentru a deduce ecuația diferențială care guvernează mişcarea, observăm că, în intervalul de timp dt, suma dintre volumul acumulat şi cel evacuat este egală cu volumul afluent

$$A\mathrm{d}h + Ch^{3/2}\mathrm{d}t = Q_e\mathrm{d}t\,. \qquad (1.5.62)$$

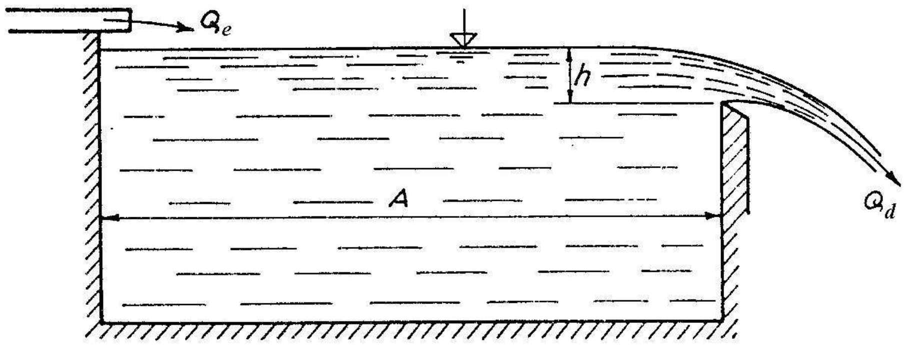


Figura 1.5.23. Chiuveta unui lac de acumulare

Soluție. Pentru primul interval vom scrie ecuația sub forma

$$\frac{A\mathrm{d}h}{Q_e - Ch^{3/2}} = \mathrm{d}t\,. \qquad (1.5.63)$$

Introducând notația $Q_e/C = \beta^3$, schimbarea de funcție

$$h = y^2,\ \mathrm{d}h = 2y\mathrm{d}y \qquad (1.5.64)$$

conduce la ecuația cu variabile separate (vezi §1.3.1)

$$\frac{2A}{C}\frac{y\mathrm{d}y}{\beta^3-y^3}=\mathrm{d}t\,. \tag{1.5.65}$$

Descompunând fracția precedentă în fracții simple

$$\frac{y}{\beta^3-y^3}=\frac{1}{3\beta}\left(\frac{1}{\beta-y}+\frac{\beta-y}{\beta^2+\beta y+y^2}\right)$$
$$=\frac{1}{3\beta}\left(\frac{1}{\beta-y}+\frac{1}{2}\frac{2y+\beta}{\beta^2+\beta y+y^2}-\frac{3\beta}{2}\frac{1}{\beta^2+\beta y+y^2}\right),$$

ecuația diferențială devine

$$\frac{2A}{3C\beta}\left(\frac{1}{\beta-y}+\frac{1}{2}\frac{2y+\beta}{\beta^2+\beta y+y^2}-\frac{3\beta}{2}\frac{1}{\beta^2+\beta y+y^2}\right)\mathrm{d}y=\mathrm{d}t\,.$$

Integrând, obținem

$$\frac{2A}{3C\beta}\left[-\ln(\beta-y)+\frac{1}{2}\ln\left(y^2+\beta y+\beta^2\right)-\sqrt{3}\arctan\frac{2y+\beta}{\sqrt{3}\beta}\right]=t+t_0\,,$$

unde t_0 este o constantă de integrare.

Soluția precedentă se mai scrie

$$\frac{2A}{3C\beta}\left(\ln\frac{\sqrt{y^2+\beta y+\beta^2}}{\beta-y}-\sqrt{3}\arctan\frac{2y+\beta}{\sqrt{3}\beta}\right)=t+t_0\,;$$

revenind la funcția inițială h, găsim

$$\frac{2A}{3C\beta}\left(\ln\frac{\sqrt{h+\beta\sqrt{h}+\beta^2}}{\beta-\sqrt{h}}-\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt{h}+\beta}{\sqrt{3}\beta}\right)=t+t_0\,. \tag{1.5.66}$$

Pentru $t=0$ avem $h=0$, deci

$$-\frac{2A}{3C\beta}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=t_0\,.$$

În final, obținem

$$\frac{2A}{3C\beta}\left(\ln\frac{\sqrt{h+\beta\sqrt{h}+\beta^2}}{\beta-\sqrt{h}}-\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3h}}{\sqrt{h}+2\beta}\right)=t,\ t\in[0,T]. \tag{1.5.67}$$

La momentul $t=T$, (1.5.67) devine o ecuație transcendentă

$$\frac{2A}{3C\beta}\left(\ln\frac{\sqrt{h_T+\beta\sqrt{h_T}+\beta^2}}{\beta-\sqrt{h_T}}-\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3h_T}}{\sqrt{h_T}+2\beta}\right)=T, \tag{1.5.68}$$

care determină nivelul h_T al apei .

Pentru $t>T$ avem $Q_e=0$ şi ecuația (1.5.62) ia forma mai simplă

$$A\mathrm{d}h+Ch^{3/2}\mathrm{d}t=0 \tag{1.5.69}$$

sau

$$\frac{A}{C}h^{-3/2}\mathrm{d}h+\mathrm{d}t=0.$$

Integrând, obținem

$$-\frac{2A}{C}h^{-1/2}+t=t_1, \tag{1.5.70}$$

în care t_1 este o constantă de integrare; ea se determină din condiția $h(T)=h_T$. Rezultă

$$-\frac{2A}{C}h_T^{-1/2}+T=t_1.$$

Astfel, deducem soluția finală

$$t=\frac{2A}{C}\left(h^{-1/2}-h_T^{-1/2}\right)+T,\ t\geq T,$$

unde

$$h=\frac{1}{\left[h_T^{-1/2}+\frac{C}{2A}(t-T)\right]^2},\ t\geq T.$$

Aplicația 1.5.13 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Un recipient având aria secțiunii transversale (orizontale) A are pe fund un orificiu care poate evacua un debit $Q_{\mathrm{d}} = Ch^{1/2}$, unde C este o constantă iar h este adâncimea apei din recipient. Se cere să se studieze variația în timp a nivelului h al apei din recipient dacă debitul afluent Q_e se prezintă în următoarele variante (inițial vasul este gol, adică pentru $t = 0$ avem $h = 0$):

a) $Q_{\mathrm{e}} = \begin{cases} Q_0 & \text{for } t \in [0, T], \\ 0 & \text{for } t > T, \end{cases}$

b) $Q_{\mathrm{e}} = \begin{cases} Q_0 \dfrac{4t}{T} & \text{for } t \in \left[0, \dfrac{T}{4}\right], \\ Q_0\left(2 - \dfrac{4t}{T}\right) & \text{for } t \in \left[\dfrac{T}{4}, \dfrac{T}{2}\right], \end{cases}$

unde Q_0 şi T sunt constante.

În figura 1.5.24 a) se dă schema de calcul, iar în figura 1.5.24 b) sunt date cele două legi de variație a lui Q_e.

Model matematic. Pentru a obține ecuația diferențială care guvernează mişcarea, observăm că, într-un interval de timp dt, suma dintre volumul acumulat şi cel evacuat este egală cu volumul afluent

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + Ch^{1/2} = Q_{\mathrm{e}}. \tag{1.5.71}$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul I, nelineară şi neomogenă.

Soluție. Cu schimbarea de funcție

$$h = y^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}h = 2y\mathrm{d}y \tag{1.5.72}$$

ecuația (1.5.71) devine

$$2Ay\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+Cy=Q_{\mathrm{e}}\,, \tag{1.5.73}$$

şi putem trece la examinarea cazurilor a), b) din enunț.

a) Pentru $t\in[0,T]$ ecuația (1.5.73) este cu variabile separate (vezi §1.3.1)

$$\mathrm{d}t=\frac{2Ay\mathrm{d}y}{Q_0-Cy}.$$

Introducând notația $Q_0/C=\beta$, soluția generală a ecuației precedente devine

$$y+\beta\ln(\beta-y)=-\frac{C}{2A}(t+\tau_0),$$

unde τ_0 este o constantă de integrare; revenind la variabila *h*, soluția precedentă se scrie

$$h^{1/2}+\frac{Q_0}{C}\ln\left(\frac{Q_0}{C}-h^{1/2}\right)=-\frac{C}{2A}(t+\tau_0). \tag{1.5.74}$$

Introducând condiția inițială ($h=0$ pentru $t=0$), rezultă

$$\tau_0=-\frac{2A}{C}\frac{Q_0}{C}\ln\frac{Q_0}{C},$$

astfel încât (1.5.74) devine

$$h^{1/2}+\frac{Q_0}{C}\ln\left(1-\frac{Ch^{1/2}}{Q_0}\right)=-\frac{C}{2A}t,\, t\in[0,T]. \tag{1.5.75}$$

În particular, la momentul $t=T$, avem

$$h_T^{1/2}+\frac{Q_0}{C}\ln\left(1-\frac{Ch_T^{1/2}}{Q_0}\right)=-\frac{C}{2A}T\,; \tag{1.5.76}$$

relația (1.5.76) determină înălțimea h_T.

Pentru intervalul $t>T$, ecuația diferențială (1.5.71) ia forma

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+Ch^{1/2}=0$$

sau

$$A\frac{\mathrm{d}h}{h^{1/2}}+C\mathrm{d}t=0,$$

cu soluția generală

$$2Ah^{1/2}+Ct=\tau_1, \tag{1.5.77}$$

în care τ_1 este o constantă de integrare, ce urmează a fi determinată din condiția de continuitate; pentru $t=T$ trebuie să avem $h=h_T$, determinat de relația (1.5.76)

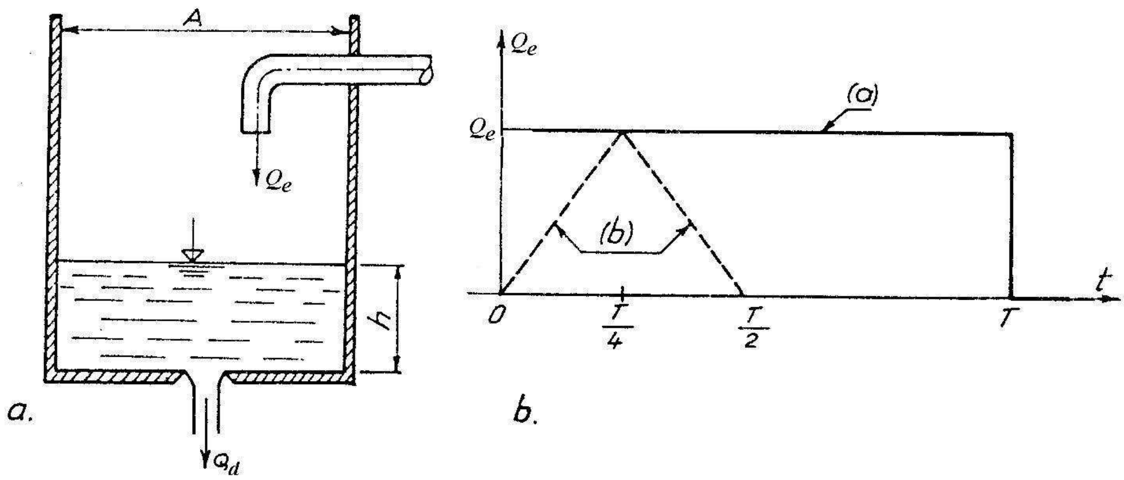


Figura 1.5.24. Recipient cu orificiu: a)schema de calcul; b) legile de variație ale lui Q_e

$$2Ah_T^{1/2}+CT=\tau_1. \tag{1.5.78}$$

Introducând expresia (1.5.78) a lui τ_1 în (1.5.77), obținem

$$2Ah^{1/2}+Ct=2Ah_T^{1/2}+CT,$$

care determină explicit nivelul h

$$h=\left[h_T^{-1/2}-\frac{C}{2A}(t-T)\right]^2,\ t>T. \tag{1.5.79}$$

Timpul t poate fi explicitat din (1.5.73) şi (1.5.75) sub forma

$$t=\begin{cases}-\dfrac{2A}{C}\left[h^{1/2}+\dfrac{Q_0}{C}\ln\left(1-\dfrac{Ch^{1/2}}{Q_0}\right)\right] & \text{pentru } t\in[0,T],\\ T+\dfrac{2A}{C}\left(h_T^{1/2}-h^{1/2}\right) & \text{pentru } t>T.\end{cases}$$

b) Ecuația diferențială (1.5.71) devine

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+Ch^{1/2}=Q_0\,\frac{4t}{T},$$

pentru primul interval; cu schimbarea de funcție $h=t^2u$, ecuația se mai scrie

$$A\left(2tu+t^2u'\right)+Ct\sqrt{u}=Q_0\,\frac{4t}{T}.$$

Simplificând cu t, rezultă ecuația cu variaile separate

$$\frac{A\mathrm{d}u}{\dfrac{4Q_0}{T}-C\sqrt{u}-2Au}=\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

deci

$$\ln t=\int\frac{A\mathrm{d}u}{\dfrac{4Q_0}{T}-C\sqrt{u}-2Au}+\ln K\equiv F(u)+\ln K,$$

unde K este o constantă pozitivă arbitrară.

Primitiva F din membrul drept se scrie astfel

$$F(u)=-\int\frac{2Av\mathrm{d}v}{2Av^2+Cv-\dfrac{4Q_0}{T}}=-\int\frac{2Av\mathrm{d}v}{2A(v-v_1)(v-v_2)}$$

$$=\int\frac{v_1}{v_2-v_1}\,\frac{1}{v-v_1}\,\mathrm{d}v-\int\frac{v_2}{v_2-v_1}\,\frac{1}{v-v_2}\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{v_1}{v_2-v_1}\ln|v-v_1|-\frac{v_2}{v_2-v_1}\ln|v-v_2|,$$

în care $v=\sqrt{u}$ şi v_1, v_2 sunt rădăcinile ecuației algebrice

$$2Av^2+Cv-\frac{4Q_0}{T}=0,$$

şi sunt întotdeauna reale. În consecință,

$$v_{1,2}=\frac{-C\pm\sqrt{C^2+\frac{16Q_0}{T}2A}}{4A},\ \ v_1>0, v_2<0.$$

Soluția capătă forma

$$\frac{v_1}{v_2-v_1}\ln\left|\frac{\sqrt{h}}{t}-v_1\right|-\frac{v_2}{v_2-v_1}\ln\left|\frac{\sqrt{h}}{t}-v_2\right|=\ln t-\ln K$$

sau

$$\left(\sqrt{h}-v_1t\right)^{v_1}\left(\sqrt{h}-v_2t\right)^{-v_2}=K_1,$$

în care K_1 este o nouă constantă arbitrară.

Dacă $h(0)=0$, pe primul interval rezultă $h=v_1^2t^2$.

Pentru cel de al doilea interval vom folosi aceeaşi metodă.

În ecuația

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+Ch^{1/2}=Q_0\left(2-\frac{4t}{T}\right)$$

vom face schimbarea de funcție $h=(2-4t/T)^2u$. Deducem

$$A\left[-\frac{8}{T}\left(2-\frac{4t}{T}\right)u+\left(2-\frac{4t}{T}\right)^2u'\right]+C\left(2-\frac{4t}{T}\right)\sqrt{u}=Q_0\left(2-\frac{4t}{T}\right).$$

Simplificând cu $2-(4t/T)$, obținem din nou pentru u o ecuație diferențială cu variabile separabile

$$-\frac{8A}{T}u+\left(2-\frac{4t}{T}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+C\sqrt{u}=Q_0\,,$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}t}{2-\dfrac{4t}{T}}=\frac{\mathrm{d}u}{Q_0-C\sqrt{u}+\dfrac{8A}{T}u}\,.$$

Aplicaţia 1.5.14 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Să se studieze variaţia vitezei apei pe o conductă simplă alimentată dintr-un rezervor la deschiderea bruscă a vanei (figura 1.5.25).

Model matematic. Scriind relaţia lui Bernoulli între rezervor şi vană, rezultă

- ♣ pentru cazul mişcării nepermanente (regim tranzitoriu)

$$H_0=(a+\xi)\frac{v^2}{2g}+\frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{1.5.80}$$

- ♣ pentru cazul mişcării permanente (regim stabilizat)

$$H_0=(a+\xi)\frac{v_0^2}{2g}, \tag{1.5.81}$$

unde $v_0=\text{const}$ este viteza de regim permanent.

Soluţie. Scăzând relaţia (1.5.81) din (1.5.80), rezultă ecuaţia diferenţială

$$\frac{a+\xi}{2g}\left(v^2-v_0^2\right)+\frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0\,;$$

simplificând cu g şi introducând notaţia

$$B=\frac{a+\xi}{2L}=\frac{g}{L}\frac{H_0}{v_0^2}, \tag{1.5.82}$$

putem scrie

$$Bdt = \frac{dv}{v^2 - v_0^2} \equiv \frac{1}{2v_0}\left(\frac{1}{v_0 + v} + \frac{1}{v_0 - v}\right)dv. \tag{1.5.83}$$

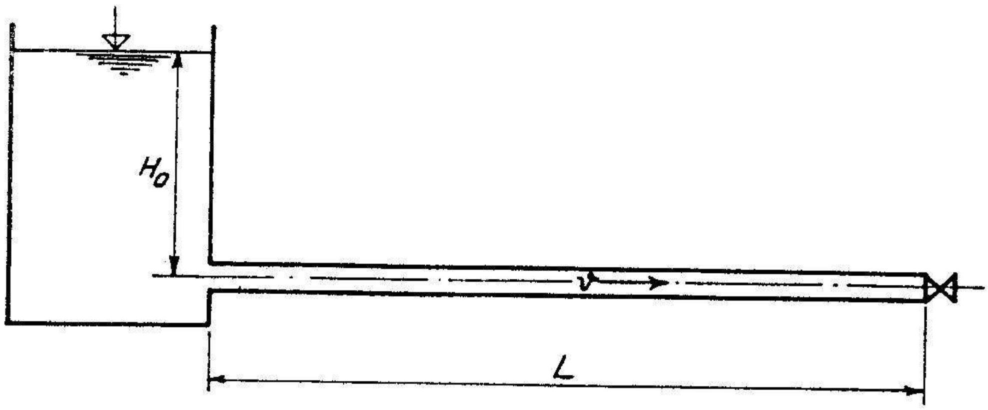


Figura 1.5.25. Schema geometrică a rezervorului și a conductei

Soluția generală a ecuației cu variabile separate (1.5.83) este (vezi §1.3.1)

$$t = \frac{1}{2Bv_0}\ln\frac{v_0 + v}{v_0 - v} + C, \tag{1.5.84}$$

unde C este o constantă de integrare. Valoarea ei se determină din condiția inițială $v(0) = 0$; it rezultă $C = 0$, aşa încât avem

$$t = \frac{1}{2Bv_0}\ln\frac{v_0 + v}{v_0 - v} = \frac{v_0 L}{2gH_0} n \frac{v_0 + v}{v_0 - v}, \tag{1.5.85}$$

sau, exprimând viteza v ca funcție de timp

$$v = v_0 \tanh\left(\frac{gH_0}{v_0 L}t\right). \tag{1.5.86}$$

Aplicația 1.5.15 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Să se studieze forma suprafeței libere a apei la curgerea printr-un strat permeabil aşezat pe un pat impermeabil înclinat cu panta *i*. Se ştie că viteza de curgere aparentă v într-o secțiune curentă (debitul raportat la întreaga secțiune) este

proporțională cu panta suprafeței libere a apei din acea secțiune (legea lui Darcy) Caz particular: $i = 0$.

Model matematic. Schema de calcul este dată în figura 1.5.26, fiind introduse următoarele notații:

- q – debitul specific, adică debitul care se scurge pe o fâşie de de lățime unitate;
- z – cota patului impermeabil față de un plan orizontal de referință;
- h – cota suprafeței libere a apei, măsurată față de patul impermeabil înclinat;
- h_0 – adâncimea constantă din mişcarea uniformă.

Cu aceste notații, $i = -\mathrm{d}z/\mathrm{d}s$ exprimă panta patului impermeabil, iar $j = -\mathrm{d}H/\mathrm{d}s$ este panta suprafeței libere, unde

$$H = z + h. \qquad (1.5.87)$$

Pentru stabilirea modelului matematic se aplică *legea lui Darcy*, stablită experimental între anii 1852-1855, lege care stă la baza tuturor calculelor de infiltrație. Henri Darcy a descoperit pe probe de nisip, proporționalitatea debitului infiltrat Q cu secțiunea de curgere Ω , cu gradientul hidraulic I şi cu un coeficient constant, conductivitatea hidraulică k:

$$Q = \Omega I k.$$

Raportul Q/Ω are dimensiuni de viteză şi exprimă viteza de infiltrație v. Legea lui Darcy capătă astfel forma cunoscută

$$v = kI.$$

Din legea lui Darcy rezultă în acest caz

$$v = kj, \qquad (1.5.88)$$

k fiind constanta de proporționalitate.

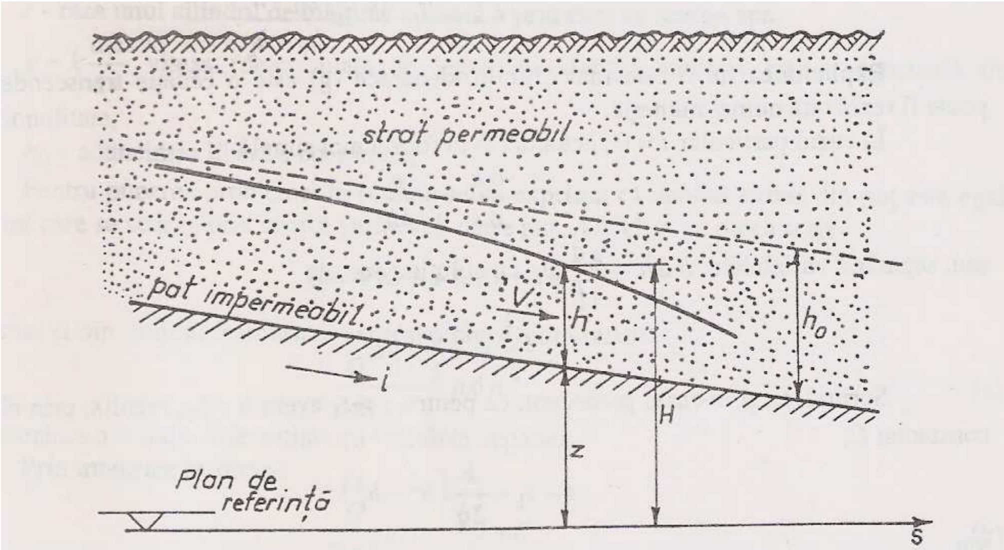


Figura 1.5.26. Curgerea printr-un strat permeabil

Soluție. Viteza poate fi scrisă în două moduri:

$$v = \frac{q}{h \cdot 1} = kj = -k\,\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -k\,\frac{\mathrm{d}(z+h)}{\mathrm{d}s} = -k\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} - k\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = ki - k\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}.$$

Din al doilea şi din ultimul membru se deduce

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = i - \frac{q}{kh}. \tag{1.5.89}$$

În cazul mişcării uniforme, avem $v = v_0 = q/h_0$ şi $j = i$, deci $q/h_0 = ki$; rezultă $q = kih_0$. Înlocuind această expresie a lui q în (1.5.89), se obține

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = i\left(1 - \frac{h_0}{h}\right), \tag{1.5.90}$$

sau, separând variabilele,

$$\left(1 - \frac{h_0}{h_0 - h}\right)\mathrm{d}h = i\mathrm{d}s\,.$$

Integrând, rezultă

$$h + h_0 \ln(h_0 - h) = is + C\,, \tag{1.5.91}$$

unde C este o constantă de integrare. Valoarea ei poate fi determinată, de exemplu, dacă se cunoaşte cota suprafeței libere $h = h_1$ într-o secțiune $s = s_1$; relația (1.5.91) devine în acest caz

$$h_1 + h_0 \ln(h_0 - h_1) = is_1 + C . \tag{1.5.92}$$

Scăzând (1.5.92) din (1.5.91), rezultă în final

$$h - h_1 + h_0 \ln \frac{h_0 - h}{h_0 - h_1} = i(s - s_1), \tag{1.5.93}$$

sau, explicitându-l pe s

$$s = s_1 + \frac{h - h_1}{i} + \frac{h_0}{i} \ln \frac{h_0 - h}{h_0 - h_1} . \tag{1.5.94}$$

Explicitarea lui h este mai dificilă, deoarece (1.5.93) este o ecuație transcendentă, care poate fi rezolvată numai numeric.

În cazul particular $i = 0$, ecuația (1.5.89) ia forma mai simplă

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = -\frac{q}{kh},$$

şi, separând variabilele, obținem

$$h\mathrm{d}h = -\frac{q}{k}\mathrm{d}s .$$

Scriind, ca şi în cazul precedent, că pentru $s = s_1$ avem $h = h_1$, rezultă, prin eliminarea constantei C,

$$s = s_1 - \frac{k}{2q}\left(h^2 - h_1^2\right), \tag{1.5.95}$$

sau

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{2q}{k}(s - s_1)} . \tag{1.5.96}$$

În acest caz, suprafața liberă este un *cilindru parabolic*.

Aplicația 1.5.16 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Se cere să se stabilească ecuația curbei meridiane a suprafeței libere a apei la curgerea printr-un strat permeabil cu pat orizontal, către un puț circular (figura 1.5.27). Se va admite că puțul perfect ajunge până la stratul impermeabil de bază.

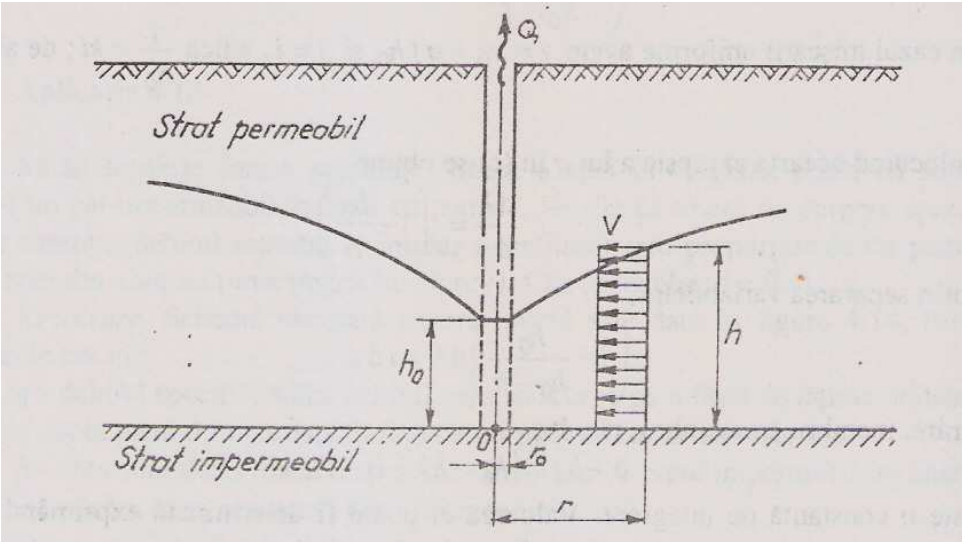


Figura 1.5.27. Suprafața liberă a apei la curgerea printr-un strat permeabil

Model matematic. Problema este axial simetrică, astfel încât suprafața liberă a apei va fi o suprafață de rotație, definită prin curba sa meridiană.

Vom utiliza următoarele notații;

- Q – debitul extras din puț;
- r_0 – raza puțului;
- r – raza unui cilindru de înălțime curentă h prin care se scurge apa;
- $v = k\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}r$ – viteza (determinată de legea lui Darcy), unde k este o constantă de proportionalitate;
- h_0 – adâncimea liberă a apei în puț.

Pentru stabilirea modelului matematic se va exprima faptul că debitul extras din puț este egal cu debitul care se scurge prin stratul permeabil către puț. Astfel, putem scrie

$$Q = 2\pi rhv = 2\pi rhk\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r};$$

din primul şi din ultimul membru al şirului de egalități precedent obținem ecuația diferențială cu variabile separate (vezi §1.3.1)

$$\frac{Q}{2\pi k}\frac{\mathrm{d}r}{r} = h\mathrm{d}h. \tag{1.5.97}$$

Soluție. Integrând, obținem

$$\frac{Q}{2\pi k}\ln r = \frac{h^2}{2} + C, \tag{1.5.98}$$

unde C este o constantă de integrare, determinată din condiția $h(r_0) = h_0$; deci

$$\frac{Q}{2\pi k}\ln r_0 = \frac{h_0^2}{2} + C. \tag{1.5.99}$$

Scăzând, membru cu membru, relația (1.5.99) din (1.5.98), găsim

$$\frac{Q}{2\pi k}\ln\frac{r}{r_0} = \frac{1}{2}\left(h^2 - h_0^2\right).$$

De aici se deduce debitul

$$Q = \frac{\pi k\left(h^2 - h_0^2\right)}{\ln\frac{r}{r_0}}, \tag{1.5.100}$$

scurs printr-un cilindru de rază r şi înălțime h, de unde îl explicităm pe h

$$h = \sqrt{h_0^2 + \frac{Q}{\pi k}\ln\frac{r}{r_0}} \tag{1.5.101}$$

şi, respectiv, pe r

$$r = r_0 \mathrm{e}^{\pi k\left(h^2 - h_0^2\right)/Q},\ r \in [r_0, \infty). \tag{1.5.102}$$

Formula (1.5.102) poate fi scrisă sub o formă mai comoă dacă se cunoaşte un punct al curbei, de exemplu, $h = h_1$ pentru $r = r_1$. Atunci din (1.5.100) rezultă

$$\frac{Q}{\pi k} = \frac{h_1^2 - h_0^2}{\ln \frac{r_1}{r_0}},$$

care, introdus în (1.5.102), dă expresia finală pentru r

$$r = r_0 \exp\left(\frac{h^2 - h_0^2}{h_1^2 - h_0^2} \ln \frac{r_1}{r_0} \right). \tag{1.5.103}$$

Aplicația 1.5.17 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Să se studieze curba suprafeței libere a apei într-un canal prismatic cu secțiunea dreptunghiulară şi având panta longitudinală i .

Model matematic. Schema de calcul este dată în figura 1.5.28. Ecuația diferențială care modelează problema fizică este

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = i \frac{h^3 - h_0^3}{h^3 - h_{cr}^3}, \tag{1.5.104}$$

în care s-au folosit următoarele notații:

- h – adâncimea apei la distanța s;
- h_0 – adâncimea normală;
- h_{cr} – adâncimea critică.

Cele două înălțimi h_0 şi h_{cr} se pot afla în orice raport ($h_0 < h_{\mathrm{cr}}$ sau $h_0 > h_{\mathrm{cr}}$); în figura 1.5.28 a fost reprezentat cazul $h_0 > h_{cr}$.

Soluție. Ecuația (1.5.104) se poate scrie sub forma

$$\frac{h^3 - h_{cr}^3}{h^3 - h_0^3} \mathrm{d}h = i \mathrm{d}s, \tag{1.5.105}$$

deci o ecuație cu variabile separate (vezi §1.3.1)

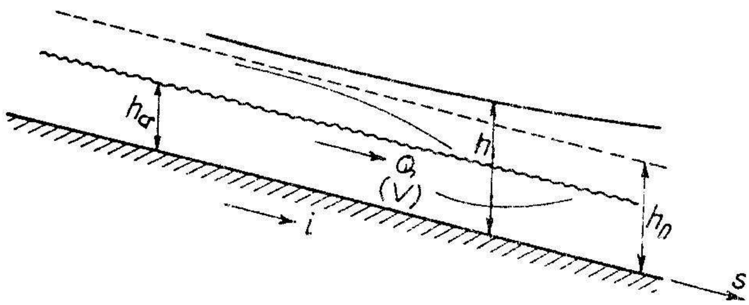


Figura 1.5.28. Curba suprafeței libere a apei într-un canal cu pantă

Fracția din membrul stâng poate fi scrisă succesiv

$$\frac{h^3-h_{cr}^3}{h^3-h_0^3}=\frac{h^3-h_0^3+h_0^3-h_{cr}^3}{h^3-h_0^3}=1+\frac{h_0^3-h_{cr}^3}{h^3-h_0^3}$$

$$=1+\frac{h_0^3-h_{cr}^3}{3h_0^2}\left(\frac{1}{h-h_0}-\frac{h+2h_0}{h^2+h_0h+h_0^2}\right)$$

$$=1+\frac{h_0^3-h_{cr}^3}{3h_0^2}\left(\frac{1}{h-h_0}-\frac{1}{2}\frac{2h+h_0}{h^2+h_0h+h_0^2}-\frac{3}{2}h_0\frac{1}{h^2+h_0h+h_0^2}\right)$$

şi ecuația (1.5.105) devine

$$\left[1+\frac{h_0^3-h_{cr}^3}{3h_0^2}\left(\frac{1}{h-h_0}-\frac{1}{2}\frac{2h+h_0}{h^2+h_0h+h_0^2}-\frac{3}{2}h_0\frac{1}{h^2+h_0h+h_0^2}\right)\right]\mathrm{d}h=i\mathrm{d}s,$$

adică o ecuație cu variabile separate. Integrând, rezultă

$$h+\frac{h_0^3-h_{cr}^3}{3h_0^2}\ln(h-h_0)-\frac{h_0^3-h_{cr}^3}{6h_0^2}\ln\left(h^2+h_0h+h_0^2\right)$$

$$-\sqrt{3}\arctan\frac{h_0+2h}{\sqrt{3}h_0}=i(s+C),$$

unde C este o constantă arbitrară. Soluția se mai scrie deci astfel

$$h+\frac{h_0^3-h_{cr}^3}{3h_0^2}\ln\frac{h-h_0}{\sqrt{h^2+h_0h+h_0^2}}-\sqrt{3}\arctan\frac{2h+h_0}{\sqrt{3}h_0}=i(s+C), \qquad (1.5.106)$$

iar constanta de integrare se determină presupunând, de exemplu, că, în aval, pentru $s = s_1$ se cunoaşte $h = h_1$, adică

$$h_1 + \frac{h_0^3 - h_{cr}^3}{3h_0^2} \ln \frac{h_1 - h_0}{\sqrt{h_1^2 + h_0 h_1 + h_0^2}} - \sqrt{3} \arctan \frac{2h_1 + h_0}{\sqrt{3} h_0} = i(s_1 + C), \tag{1.5.107}$$

Scăzând (1.5.107) din (1.5.106), se obține în final

$$\begin{aligned} & h - h_1 + \frac{h_0^3 - h_{cr}^3}{3h_0^2} \ln\left(\frac{h - h_0}{h_1 - h_0} \sqrt{\frac{h_1^2 + h_0 h_1 + h_0^2}{h^2 + h_0 h + h_0^2}} \right), \\ & - \sqrt{3} \arctan \frac{\sqrt{3}(h - h_1)}{h + 2h_0 + 3h_1} = i(s - s_1). \end{aligned} \tag{1.5.108}$$

Această formulă permite determinarea suprafeței libere în amonte de secțiunea $s = s_1$.

Aplicația 1.5.18 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Să se studieze legea de scurgere a apei dintr-un vas având forma unei suprafețe de rotație cu axa verticală. Să se particularizeze pentru un vas semisferic de rază *a*, cu un orificiu la fund având aria *A* (se va admite că raza orificiului este neglijabilă în comparație cu dimensiunile generale ale vasului. În câte secunde se goleşte vasul plin? Date numerice: $a = 100\,\text{cm}$, $A = 1\,\text{cm}^2$.

Model matematic. În hidrodinamică, viteza de scurgere a apei printr-un orificiu situat la adâncimea *h* de la suprafața liberă a lichidului se determină prin formula lui Galilei

$$v = k_1 \sqrt{2gh} = k\sqrt{h}, \tag{1.5.109}$$

în care k_1 este un coeficient de vâscozitate (pentru apă, $k_1 \cong 0.6$).

Presupunem cunoscută ecuația curbei meridiane sub forma $r^2 = r^2(h)$ (figura 1.5.29). Problema revine la determinarea înălțimii *h* a apei la un moment dat *t*.

Viteza de scurgere v a fluidului variază şi ea cu timpul t prin intermediul lui h, aşa cum rezultă din (1.5.109); pentru un element de timp dt, ea poate fi considerată constantă.

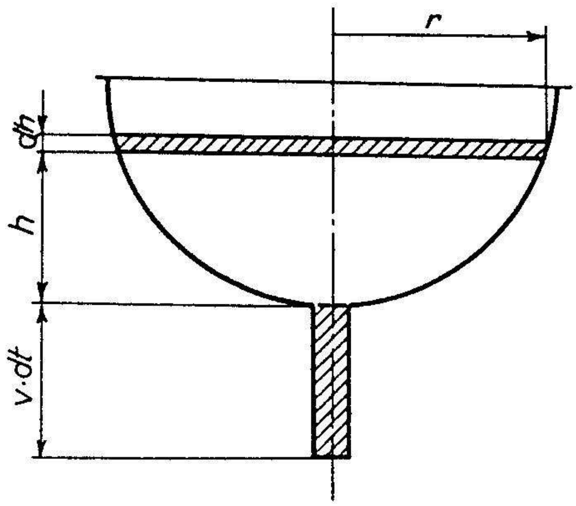


Figura 1.5.29. Scurgerea apei dintr-un vas având forma unei suprafețe de rotație

Vom evalua în două moduri volumul de apă care se scurge în timpul dt.

În primul rând, prin orificiu se scurge lichidul care ocupă un cilindru având baza de arie A şi înălțimea $v\mathrm{d}t$; deci

$$\mathrm{d}V = Av\mathrm{d}t = Akh^{1/2}\mathrm{d}t\,. \tag{1.5.110}$$

Pe de altă parte, înălțimea apei din vas scade cu dh; volumul diferențial care se scurge este

$$\mathrm{d}V = -\pi r^2 \mathrm{d}h\,. \tag{1.5.111}$$

Egalând cele două expresii (1.5.110), (1.5.111) ale lui dV, rezultă ecuația diferențială ordinară care exprimă pe h în funcție de t:

$$-\pi r^2 \mathrm{d}h = Akh^{1/2}\mathrm{d}t\,. \tag{1.5.112}$$

Soluție. Ecuația (1.5.112) este cu variabile separabile (vezi §1.3.2). Separând variabilele, se obține

$$\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{Ak}\frac{r^2}{h^{1/2}}\mathrm{d}h.$$

Prin integrare, rezultă

$$t = -\frac{\pi}{Ak}\int \frac{r^2}{h^{1/2}}\mathrm{d}h + C. \tag{1.5.113}$$

Constanta de integrare C se determină din condiția inițială $h = h_{\max}$ pentru $t = 0$. Rezultă atunci

$$t = \frac{\pi}{Ak}\int_{h_{\max}}^{h} \frac{r^2}{h^{1/2}}\mathrm{d}h. \tag{1.5.114}$$

Pentru datele din enunț, ecuația cercului meridian cu vârful în origine se scrie (cu $h_{\max} = a$)

$$r^2 = h(2a - h).$$

Introducând în (1.5.114), se obține succesiv

$$t = \frac{\pi}{Ak}\int_a^h \frac{h(2a-h)}{h^{1/2}}\mathrm{d}h = \frac{\pi}{Ak}\int_a^h \left(2ah^{1/2} - h^{3/2}\right)\mathrm{d}h = \frac{\pi}{Ak}\left[\frac{4}{3}ah^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2}\right]_a^h$$
$$= \frac{\pi}{Ak}\left(\frac{14}{15}a^{5/2} - \frac{4}{3}ah^{3/2} + \frac{2}{5}h^{5/2}\right).$$

Vasul se goleşte complet când $h = 0$; corespunde timpului

$$t_0 = \frac{\pi}{Ak}\frac{14}{15}a^{5/2}.$$

Cu datele numerice din enunț şi luând $g = 981\,\mathrm{cm/s^2}$, găsim

$$t_0 = \frac{14}{15}\cdot\frac{\pi\cdot 100^{5/2}}{1\cdot 0.6\sqrt{2\cdot 981}} = 11033'' = 183'53'' = 3\mathrm{h}\ 03'\ 53''.$$

Aplicația 1.5.19. Problema înotătorului (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Pentru a traversa un râu, un înotător porneşte dintr-un punct $P(x_0, y_0)$ situat pe un mal şi vrea să ajungă în punctul $Q(0,0)$ de pe malul celălalt. Viteza curentului de apă este *a*, iar viteza de deplasare a înotătorului este *b*. Care va fi traiectoria pe care o descrie înotătorul, ştiind că viteza relativă este îndreptată necontenit spre *Q*?

Model matematic. Fie *M* poziția înotătorului la momentul *t* (figura 1.5.30). Componentele vitezei absolute pe cele două axe *Ox* şi *Oy* $(O \equiv Q)$ sunt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a - b\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -b\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \end{aligned} \tag{1.5.115}$$

eliminând pe d*t*, obținem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b}\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,, \tag{1.5.116}$$

care reprezintă ecuația diferențială a traiectoriei căutate.

Soluție. Ecuația (1.5.116) este omogenă (vezi §1.3.3). Facem substituția

$$x = uy \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},$$

şi ecuația devine

$$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -\frac{a}{b}\sqrt{1+u^2}\,. \tag{1.5.117}$$

Introducând raportul vitezelor $m = a/b$, ecuația (1.5.117) capătă forma

$$-m\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

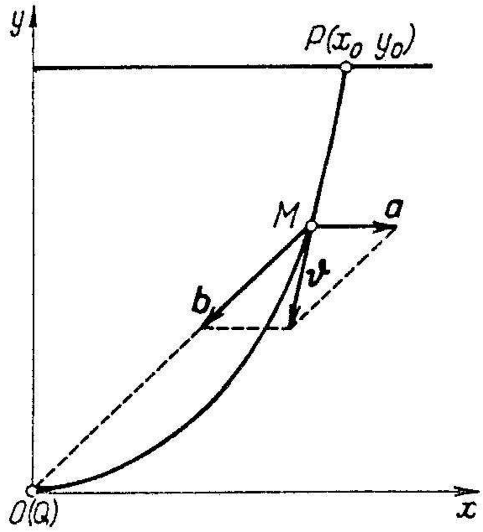


Figura 1.5.30. Problema înotătorului

Aceasta este o ecuație cu variabile separate (vezi §1.3.1). Prin integrare, se obține

$$-m\ln y + m\ln c = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right),$$

unde c este o constantă de integrare, sau

$$\left(\frac{c}{y}\right)^m = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,.$$

Obținem

$$x = \frac{y}{2}\left[\left(\frac{c}{y}\right)^m - \left(\frac{y}{c}\right)^m\right], \qquad (1.5.118)$$

problema având soluție numai pentru $m \in (0,1)$. Constanta c poate fi determinată impunând condiția ca traiectoria să treacă prin punctele P și Q.

Aplicația 1.5.20 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Să se determine familiile tensiunilor normale principale în problema semiplanului elastic acționat de o forță concentrată normală pe contur P.

Model matematic. Traiectoriile tensiunilor normale principale în teoria plană a elasticității sunt definite de ecuația diferențială de ordinul întâi şi gradul al doilea

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\tau_{xy}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1=0, \tag{1.5.119}$$

în care σ_x, σ_y and τ_{xy} sunt tensiunile normală, respectiv tangențială (presupuse cunoscute) într-un punct (x, y) (figura 1.5.31). Starea de tensiune este definită prin relațiile

$$\sigma_x=-\frac{2P}{\pi b}\frac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$
$$\sigma_y=-\frac{2P}{\pi b}\frac{xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \tag{1.5.120}$$
$$\tau_{xy}=-\frac{2P}{\pi b}\frac{x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

în care $P/b=\mathrm{const}$ este cunoscut.

Soluție. Ecuația diferențială (1.5.119) poate fi descompusă în două ecuații diferențiale lineare de ordinul întâi. Produsul rădăcinilor fiind -1, traiectoriile celor două familii integrale sunt ortogonale. Rezolvând ecuația algebrică (1.5.119) în raport cu $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ se obține

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2+1}. \tag{1.5.121}$$

Cu ajutorul relațiilor (1.5.120) se calculează raportul

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}=\frac{-x^3+xy^2}{-2x^2y}=\frac{x^2-y^2}{2xy}.$$

Introducând această expresie în (1.5.121), ecuația diferențială a traiectoriilor devine

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2 - y^2}{2xy}\right)^2 + 1} = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} \pm \frac{x^2 + y^2}{2xy},$$

şi se descompune în următoarele două ecuații

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}, \tag{1.5.122}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}. \tag{1.5.123}$$

Ecuațiile de mai sus sunt cu variabile separabile (vezi §1.3.2). Ecuația (1.5.122) se mai scrie

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

şi are soluția generală

$$\ln x = \ln y - \ln m, \; m = \mathrm{const}.$$

Se obține astfel $y = mx$, care reprezintă o familie de semidrepte radiale (trecând prin punctul O de aplicare a forței).

Ecuația (1.5.123) poate fi, de asemenea, scrisă sub form unei ecuații cu variabile separate

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0,$$

cu soluția generală $x^2 + y^2 = R^2$, care reprezintă o familie de semicercuri cu centrul în O (constanta de integrare a fost notată cu R^2). Cele două rețele au fost reprezentate în figura 1.5.31.

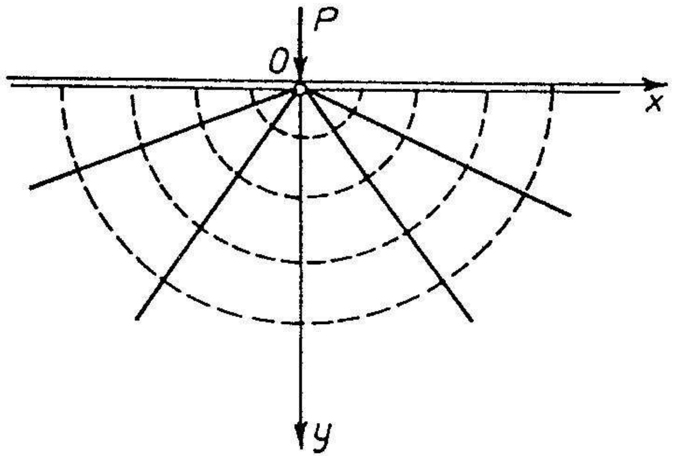


Figura 1.5.31. Traiectoriile tensiunilor normale principale în cazul semiplanului elastic acționat de o forță concentrată pe contur

Dacă se caută să se determine traiectoriile care trec prin punctul de coordonate (x_0, y_0) (problema Cauchy), rezultă imediat

$$m = \frac{y_0}{x_0},\ R^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Aplicația 1.5.21 (M.V.Soare, [19,20])

Problema fizică. Să se determine familiile de traiectorii ale tensiunilor tangențiale extreme în problema semiplanului elastic acționat de o forță concentrată normală pe contur *P*.

Model matematic. Traiectoriile tensiunilor tangențiale extreme în problema plană a teoriei elasticității sunt definite de ecuația diferențială de ordinul întâi şi gradul al doilea

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{4\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\frac{dy}{dx} - 1 = 0, \tag{1.5.124}$$

în care σ_x, σ_y and τ_{xy} sunt tensiunile normală, respectiv tangențială (presupuse cunoscute) intr-un punct (x, y) (figura 1.5.31). Starea de tensiune este definită prin relațiile

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi b}\frac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$
$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi b}\frac{xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \qquad (1.5.125)$$
$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi b}\frac{x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

în care b este grosimea constantă a plăcii, iar $P/b = \mathrm{const}$.

Soluție. Ecuația diferențială (1.5.124) poate fi descompusă în două ecuații diferențiale lineare de ordinul întâi. Produsul rădăcinilor fiind -1, traiectoriile celor două familii integrale sunt ortogonale. Rezolvând ecuația algebrică (1.5.124) în raport cu $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ se obține

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm \sqrt{\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2 + 1}. \qquad (1.5.126)$$

Cu ajutorul relațiilor (1.5.125) se calculează raportul

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Introducând această expresie în (1.5.126), ecuația diferențială a traiectoriilor devine

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy}{x^2-y^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2 + 1} = \frac{2xy}{x^2-y^2} \pm \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

şi se descompune in următoarele două ecuații

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y}, \qquad (1.5.127)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x-y}{x+y}, \tag{1.5.128}$$

Ecuaţia (1.5.127) este omogenă şi poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}. \tag{1.5.129}$$

Prin substituţia $u=y/x$, ecuaţia (1.5.129) devine

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{\frac{1+u}{1-u}-u}=\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}-\frac{1}{2}\frac{2u\mathrm{d}u}{1+u^2};$$

aceasta este o ecuaţie cu variabile separate (vezi §1.3.1). Prin integrare membru cu membru, rezultă

$$\ln x=\arctan u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)+\ln C,$$

unde C este o constantă de integrare.

Soluţia este obţinută sub o formă mai simplă dacă se trece la coordonate polare; avem succesiv (cu $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ y/x=\tan\varphi$)

$$\ln x+\ln\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\arctan\frac{y}{x}+\ln C_1,$$

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}+\ln C_1,$$

$$\ln r=\varphi+\ln C_1$$

şi, în definitiv,

$$r=C_1\mathrm{e}^{\varphi}. \tag{1.5.130}$$

Curba (1.5.130) reprezintă ecuația unei familii de spirale logaritmice care taie semidreptele din aplicația 1.5.19 sub unghiuri de $\pi/4$.

Ecuația (1.5.128) poate fi scrisă sub forma ecuației omogene

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}. \tag{1.5.131}$$

Prin aceeaşi substituție $u=y/x$, ecuația (1.5.131) devine

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{\frac{u-1}{u+1}-u}=-\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}-\frac{1}{2}\frac{2u\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

care este o ecuație cu variabile separate. Integrând-o, rezultă

$$\ln x=-\arctan u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)+\ln C_2,$$

sau, în final,

$$r=C_2\mathrm{e}^{-\varphi}, \tag{1.5.132}$$

care reprezintă tot o familie de spirale logaritmice, ortogonale spiralelor din prima familie.

Să determinăm constantele C_1 şi C_2. Fie punctul $A(x_0, y_0)$ prin care să treacă traiectoriile tensinunilor normale principale şi traiectoriile tensiunilor tangențiale extreme.

Ecuația traiectoriei σ_1 se scrie

$$y=x\tan\varphi_0,\ \tan\varphi_0=\frac{y_0}{x_0}; \tag{1.5.133}$$

ecuația traiectoriei σ_2 este

$$x^2+y^2=r_0^2,\ r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}. \tag{1.5.134}$$

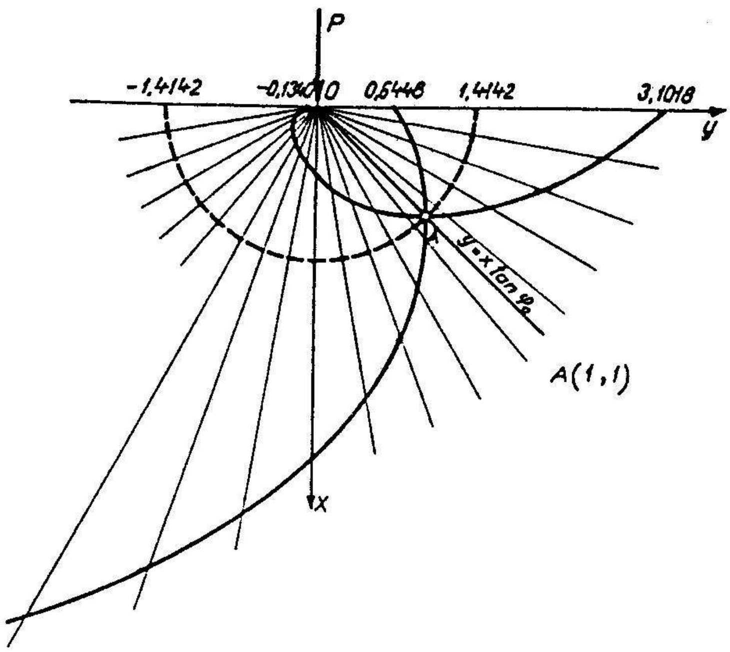


Figura 1.5.32. Traiectoriile tangențiale extreme în cazul semiplanului elastic acționat de o forță concentrată pe contur

Să considerăm, mai departe, soluția (1.5.130). Din condiția ca această spirală logaritmică să treacă prin punctul *A* rezultă

$$C_1 = r_0 e^{-\varphi_0};$$

deci

$$r = r_0 e^{\varphi - \varphi_0}. \tag{1.5.135}$$

Pentru a doua traiectorie putem scrie

$$r = r_0 e^{\varphi_0 - \varphi}. \tag{1.5.136}$$

Pentru reprezentarea grafică a traiectoriilor vom considera $x_0 = y_0 = 1$. Rezultă $\varphi_0 = \pi/4$ și $r_0 = \sqrt{2}$.

Curbele (1.5.135) și (1.5.136) au fost reprezentate în figura 1.5.32, împreună cu traiectoriile (1.5.133) și (1.5.134). Se observă că traiectoriile tensiunilor tangențiale

extreme taie dreapta (1.5.133) şi semicercul (1.5.134) sub unghiuri de $\pi/4$. Din cele două traiectorii se rețin arcele corespunzătoare lui $x > 0$.

CAPITOLUL 2

ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINARE LINEARE, DE ORDINUL n

2.1. NOȚIUNI PRELIMINARE. EXEMPLE

Forma generală a unei ecuații diferențiale lineare de ordinul *n* este

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x), \tag{2.1.1}$$

unde

$$a_j \in \mathrm{C}^0(\mathrm{I}),\ \ j = \overline{0,n}, \qquad F \in C^0(\mathrm{I}), \quad \mathrm{I} \subseteq \Re. \tag{2.1.2}$$

Dacă $a_0(x) \neq 0,\ x \in I$, împărțim cu a_0 și obținem

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{2.1.3}$$

în care am făcut următoarele notații:

$$p_j(x) = \frac{a_j(x)}{a_0(x)},\ \ j = \overline{1,n}, \qquad f(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}. \tag{2.1.4}$$

Să presupunem că există puncte *x* în care $a_0(x) = 0$. În aceste puncte ecuația își “pierde” ordinul; ele sunt puncte de singularitate.

Asemenea ecuații depășesc cadrul acestei cărți. De aceea, vom lucra, în cele ce urmează, cu forma (2.1.3) a ecuației lineare.

Reamintim că un operator $L : X \to Y$, unde X, Y sunt spații vectoriale, se numește ***linear*** dacă

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L x_1 + \beta L x_2, \quad \forall \alpha, \beta \in \Re/\mathbb{C}, \forall x_1, x_2 \in X. \tag{2.1.5}$$

<u>Demonstrăm</u> că L definit prin (2.1.1) este operator linear.

Într-adevăr, fie $y, z \in C^n(I), \quad \alpha, \beta \in \Re/\mathbb{C}$. Avem

$$\begin{aligned} L(\alpha y + \beta z) &= (\alpha y + \beta z)^{(n)} + p_1(x)(\alpha y + \beta z)^{(n-1)} + \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)(\alpha y + \beta z)' + p_n(x)(\alpha y + \beta z) = \\ &= \alpha y^{(n)} + \beta z^{(n)} + p_1(x)\left(\alpha y^{(n-1)} + \beta z^{(n-1)}\right) + \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)(\alpha y' + \beta z') + p_n(x)(\alpha y + \beta z) = \\ &= \alpha\left(\underbrace{y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y}_{Ly}\right) + \\ &+ \beta\left(\underbrace{z^{n} + p_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) z' + p_n(x) z}_{Lz}\right), \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

adică

$$L(\alpha y + \beta z) = \alpha L y + \beta L z, \tag{2.1.7}$$

care este tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Și în acest caz, ***recunoaștem un operator linear după faptul că funcția necunoscută și derivatele sale până la ordinul*** n ***inclusiv, apar la puterea întâi.***

Deci o ecuație diferențială ordinară de ordinul $n \geq 2$ este ***lineară*** dacă este de gradul întâi în raport cu funcția necunoscută y și cu derivatele acesteia până la ordinul n inclusiv.

Exemple.

- ♣ Ecuația $y''' + yy' = \sin x$ este ***nelineară***, datorită termenului yy', care este monom de gradul 2 în y și y'.

♣ Ecuația $y^{(4)} + x^2 y' + x^4 e^x y = 0$ este ***lineară***, deoarece este de gradul 1 în raport cu y, y' şi $y^{(4)}$.

Ecuațiile (2.1.1), (2.1.3) sunt ***lineare*** deoarece operatorul diferențial L, $L : C^n(I) \to C^0(I)$ este linear.

PROPRIETĂȚI GENERALE ALE EDO LINEARE DE ORDINUL *n*

1. ***Orice schimbare nesingulară de variabilă transformă o EDO lineară tot într-o ecuație lineară de acelaşi ordin.***

* Într-adevăr, fie schimbarea

$$x = f(t), \quad f \in C^n([\alpha, \beta]), \quad [\alpha, \beta] \subseteq \Re, \tag{2.1.8}$$

cu $f'(t) \neq 0, t \in [\alpha, \beta]$. Conform teoremei funcțiilor implicite (vezi Cursul de Analiză Matematică, partea I), există transformarea inversă $t = \varphi(x)$.

Calculăm derivatele succesive ale lui *y* în raport cu noua variabilă *t*. Avem

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f'(t)}\frac{dy}{dt}, \\ &\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{f'(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f'(t)}\frac{dy}{dt}\right] = \frac{1}{f'^2(t)}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{f''(t)}{f'^3(t)}\frac{dy}{dt}; \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

derivatele în *x* sunt deci expresii lineare în raport cu derivatele în *t*.

Calculându-le în continuare, vom găsi tot expresii lineare, care, introduse în (2.1.1), vor conduce în final la o EDO lineară de acelaşi ordin.

2. ***Orice schimbare lineară de funcție într-o EDO lineară îi conservă linearitatea şi ordinul.***

Pentru uşurința calculelor, să considerăm ecuația lineară de ordinul II

$$Ly \equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{2.1.10}$$

Fie schimbarea

$$y = q(x)z(x) + r(x), \quad q, r \in C^n([a,b]). \tag{2.1.11}$$

Derivând succesiv, obținem

$$\begin{array}{ll|l} y = q(x)z(x) + r(x) & & \times p_2(x) \\ y' = qz' + q'z + r' & & \times p_1(x) \\ y'' = qz'' + 2q'z' + q''z + r'' & & \times 1 \\ \hline Ly = qz'' + (qp_1 + 2q')z' + zLq + Lr. & & \end{array} \tag{2.1.12}$$

Din ultima expresie rezultă o ecuație diferențială în noua funcție necunoscută z

$$qz'' + (qp_1 + 2q')z' + zLq = -Lr + f, \tag{2.1.13}$$

ecuație care este lineară, de ordinul II.

Acest rezultat se demonstrează în mod analog şi pentru o ecuație lineară de un ordin n arbitrar.

2.2. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE ŞI OMOGENE DE ORDINUL n

Ecuațiile (2.1.1) şi (2.1.3) sunt ***neomogene***, deoarece au termen liber.

Le putem asocia ecuații omogene corespunzătoare astfel:

Ecuației (2.1.1) îi corespunde ***ecuația omogenă***

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{2.2.1}$$

iar ecuației (2.1.3) îi asociem ***ecuația omogenă***

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{2.2.2}$$

După cum am menționat, ne vom ocupa de (2.2.2).

Nucleul operatorului L este $\operatorname{Ker} L = \{y \in C^n(I) \mid Ly = 0\} \subset C^n(I)$.

Cu alte cuvinte, $\operatorname{Ker} L$ ***este mulțimea soluțiilor ecuației de ordinul*** n (2.2.2), ***lineară şi omogenă***.

Teorema 2.1. $\operatorname{Ker} L$ *este un subspațiu linear al lui* $C^n(I)$.

<u>Demonstrație.</u> Fie $y, z \in \operatorname{Ker} L$. Aceasta înseamnă că $Ly = 0, Lz = 0$ pe I.

Însă L este linear, deci

$$L(\alpha y + \beta z) = \alpha \underbrace{Ly}_{=0} + \beta \underbrace{Lz}_{=0} = 0, \tag{2.2.3}$$

de unde rezultă că $(\alpha y + \beta z) \in \operatorname{Ker} L$.◘

Conform cunoştințelor despre spații vectoriale, putem face următoarele afirmații:

- Deoarece $\operatorname{Ker} L$ este spațiu vectorial, orice element din $\operatorname{Ker} L$ se exprimă ca o combinație lineară de elementele unei baze din $\operatorname{Ker} L$.
- Pentru a rezolva ecuația omogenă (2.2.2) este deci suficient să determinăm o bază în $\operatorname{Ker} L$.

Putem demonstra că dimensiunea lui $\operatorname{Ker} L$ este n, adică

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} L = n}. \tag{2.2.4}$$

Acest fapt are şi o confirmare intuitivă evidentă. Dacă derivata de ordinul întâi introduce, prin integrare, o constantă arbitrară, derivata de ordinul n introduce, după cum se ştie, n constante arbitrare (adică n grade de libertate).

O bază în $\operatorname{Ker} L$ este deci formată din n funcții linear independente din $\operatorname{Ker} L$, adică din n soluții linear independente ale ecuației omogene (2.2.2).

Definiția 2.1. Numim ***sistem fundamental de soluții pentru ecuația*** (2.2.2) ***o bază în*** $\operatorname{Ker} L$.

Reamintim definiția linear independenței unui sistem de funcții.

Fie $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}} \subset C^0(I)$.

Definiția 2.2. $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ se numeşte ***sistem linear dependent*** dacă există constantele reale $c_1, c_2, ..., c_n$, nu toate nule (mai precis, $\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \neq 0$), astfel încât

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathrm{I} \tag{2.2.5}$$

În caz contrar, sistemul se numeşte ***linear independent***. Adică

Definiția 2.3. $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ se numeşte ***sistem linear independent*** dacă egalitatea

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) = 0, \tag{2.2.6}$$

valabilă pentru orice $x \in \mathrm{I}$, implică

$$c_j = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.2.7}$$

Exemple

1. Să se arate că funcțiile $y_1 = 1, y_2 = \cos^2 x, y_3 = \sin^2 x$ formează un ***sistem linear dependent*** pe $\Re$.

Într-adevăr, combinația lineară evident satisfăcută este

$$y_2 + y_3 - y_1 = 0, \forall x \in \Re. \tag{2.2.8}$$

2. Să se arate că sistemul de funcții $\{1, x, x^2, x^3\}$ formează un ***sistem linear independent*** pe $\Re$.

Într-adevăr, dacă

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x^3 = 0, \quad \forall x \in \Re, \tag{2.2.9}$$

rezultă că membrul stâng al relației (2.2.9) este polinomul indentic nul, deci coeficienții săi sunt nuli:

$$c_j = 0, \quad j = \overline{1,4}. \tag{2.2.10}$$

CUM VERIFICĂM DACĂ UN SISTEM DE FUNCȚII $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ ESTE LINEAR INDEPENDENT SAU NU?

Pentru simplificarea expunerii, luăm $n=3$; cazul n arbitrar se tratează absolut similar. Considerăm deci sistemul $\{y_1, y_2, y_3\} \in C^3(I)$.

Dacă este valabilă relația

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = 0, \tag{2.2.11}$$

atunci şi derivatele ei sunt nule:

$$\begin{aligned} c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + c_3 y_3'(x) = 0, \\ c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + c_3 y_3''(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

pentru orice $x \in I$.

Cele trei relații din (2.2.11), (2.2.12) formează un sistem algebric linear şi omogen, având drept necunoscute pe c_1, c_2, c_3. Determinantul asociat este

$$W[y_1, y_2, y_3] \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}, \quad x \in I, \tag{2.2.13}$$

şi-l numim ***Wronskian***.

Din cele spuse mai sus rezultă că

- Dacă $W \equiv 0$, atunci sistemul algebric linear de mai sus admite soluții nenule, deci $\{y_1, y_2, y_3\}$ formează un ***sistem linear dependent***;
- Dacă $W \neq 0$ în I, atunci sistemul admite doar soluția identic nulă, deci $\{y_1, y_2, y_3\}$ formează un ***sistem linear independent***.

Fie $\{y_1, y_2, y_3\}$ soluții ale ecuației lineare

$$Ly \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0. \tag{2.2.14}$$

Putem demonstra:

Teorema 2.2. *Dacă* $\{y_1, y_2, y_3\} \subset \operatorname{Ker} L$ *formează un sistem linear independent, atunci* $W[y_1, y_2, y_3] \neq 0$, $\forall x \in \mathrm{I}$.

Demonstrația se face prin reducere la absurd. ◘

Fie acum, mai general, sistemul de funcții $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$, cel puțin de clasă $\mathrm{C}^n(\mathrm{I})$.

Definiția 2.4. Determinantul

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{2.2.15}$$

se numește ***Wronskianul*** funcțiilor $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

Teorema 2.2, ca și afirmațiile de mai sus asupra Wronskianului unui sistem de trei funcții, se pot demonstra cu ușurință și pentru *n* oarecare.

În concluzie, pentru un sistem $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset \operatorname{Ker} L$, cu L dat de (2.2.2), **este valabilă următoarea**

ALTERNATIVĂ:

♣ sau $W[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv 0$ pe I și rezultă că $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ formează un ***sistem linear dependent***;

♣ sau $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}$ și rezultă că sistemul $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ este un ***sistem linear independent***.

Exemple

1. Fie ecuația

$$Ly \equiv y'' - y = 0 . \tag{2.2.16}$$

și să considerăm sistemul de soluții ale ei, $y_1 = \mathrm{e}^x, y_2 = \mathrm{e}^{-x}$.

VERIFICARE. Într-adevăr, avem

$$Ly_1 = Le^x = e^x - e^x = 0, \quad \forall x \in \Re,$$
$$Ly_2 = Le^{-x} = -\left(-e^{-x}\right) - e^{-x} = 0, \quad \forall x \in \Re. \tag{2.2.17}$$

Wronskianul lor va fi, prin definiţie,

$$W\left[e^x, e^{-x}\right] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \tag{2.2.18}$$

deci, conform celor arătate anterior, sistemul $\left\{e^x, e^{-x}\right\}$ este ***un sistem fundamental*** pentru ecuaţia (2.2.16), sau o ***bază*** în $\operatorname{Ker} L$.

2. Fie ecuaţia

$$Ly \equiv y'' + y = 0. \tag{2.2.19}$$

Funcţiile $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$ formează un sistem de soluţii ale acestei ecuaţii.

VERIFICARE. Avem

$$Ly_1 = (\cos x)' + \sin x = 0,$$
$$Ly_2 = (-\sin x)' + \cos x = 0, \tag{2.2.20}$$

de unde rezultă că $\{y_1, y_2\} \subset \operatorname{Ker} L$.

Calculăm acum Wronskianul

$$W[\sin x, \cos x] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \tag{2.2.21}$$

ceea ce înseamnă că $\{\sin x, \cos x\}$ formează o ***bază*** în $\operatorname{Ker} L$ sau, altfel spus, un ***sistem fundamental***.

Fie $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}} \subset \operatorname{Ker} L$, cu L dat de (2.2.2), o bază în $\operatorname{Ker} L$.

Atunci orice soluţie y a ecuaţiei (2.2.2), lineară şi omogenă, se exprimă sub forma combinaţiei lineare

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x), \quad x \in \mathrm{I}, c_j \in \Re, j = \overline{1,n}. \tag{2.2.22}$$

Putem conchide deci că

Soluția generală a ecuației omogene

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \quad x \in \mathrm{I} \tag{2.2.23}$$

se exprimă sub forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x), \tag{2.2.24}$$

unde c_j sunt constante arbitrare, iar $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ formează un system fundamental de soluții ale ei.

Observație. Fie $y_1 = \mathrm{ch}\, x, y_2 = \mathrm{sh}\, x$ şi ecuația diferențială ordinară

$$Ly \equiv y'' - y = 0,$$

de la exemplul precedent.

Avem

$$Ly_1 = (\mathrm{ch}\, x)'' - \mathrm{ch}\, x = \mathrm{ch}\, x - \mathrm{ch}\, x = 0,$$
$$Ly_2 = (\mathrm{sh}\, x)'' - \mathrm{sh}\, x = \mathrm{sh}\, x - \mathrm{sh}\, x = 0,$$

deci $\{y_1, y_2\} \subset \mathrm{Ker}\, L$.

Wronskianul sistemului $\{y_1, y_2\}$ este

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}\, x & \mathrm{sh}\, x \\ \mathrm{sh}\, x & \mathrm{ch}\, x \end{vmatrix} = \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \neq 0,$$

deci $\{\mathrm{ch}\, x, \mathrm{sh}\, x\}$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (2.2.16).

Dar am arătat că şi $\{e^x, e^{-x}\}$ formează un sistem fundamental de soluții pentru aceeaşi ecuație.

În general,

Orice ecuație diferențială ordinară lineară admite o infinitate de sisteme fundamentale de soluții.

OARE RECIPROCA ESTE ADEVĂRATĂ?

Răspunsul la această întrebare este dat de

Teorema 2.3. *Unui sistem fundamental dat* $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ *îi corespunde* **o singură** *ecuație diferențială lineară omogenă de forma* (2.2.2) *(având coeficientul lui* $y^{(n)}$ *egal cu* 1*).*

<u>Demonstrația:</u> se face pentru $n=3$, pentru uşurința expunerii. Fie $y \in \operatorname{Ker} L$. Cum $\{y_1, y_2, y_3\} \subset \operatorname{Ker} L$ este sistem fundamental de soluții, el este o bază în $\operatorname{Ker} L$, deci putem găsim 3 constante reale c_1, c_2, c_3 astfel încât

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x), \qquad x \in \mathrm{I}. \tag{2.2.25}$$

Dar aceasta înseamnă că funcțiile $\{y_1, y_2, y_3, y\}$ formează un *sistem linear dependent*, ceea ce echivalează cu a spune că $W[y_1, y_2, y_3, y] \equiv 0$ în I.

Adică

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ y_1' & y_2' & y_3' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y''' \end{vmatrix} = 0, \qquad x \in \mathrm{I}. \tag{2.2.26}$$

Dezvoltând membrul stâng după ultima coloană, ajungem la o ecuație diferențială ordinară lineară, în y. Ea este de ordinul 3, deoarece coeficientul lui y''' este tocmai determinantul

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = W[y_1, y_2, y_3]. \tag{2.2.27}$$

care coincide cu Wronskianul sistemului $\{y_1, y_2, y_3\}$ şi este nenul, deoarece sistemul este fundamental.

Dezvoltând determinantul (2.2.26) mai departe, coeficientul lui y'' va fi

$$-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix} \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W[y_1, y_2, y_3]. \tag{2.2.28}$$

Ecuația care admite sistemul $\{y_1, y_2, y_3\}$ drept sistem fundamental va fi de forma

$$W(x) y''' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x) y'' + \ldots = 0. \tag{2.2.29}$$

Împărțind cu coeficientul lui y''', obținem ecuația căutată

$$y''' - \frac{1}{W(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x) y'' + \ldots = 0. \tag{2.2.30}$$

Pentru n arbitrar, ecuația (2.2.31) se scrie

$$y^{(n)} - \frac{1}{W(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x) y^{(n-1)} + \ldots = 0. \tag{2.2.31}$$

Din (2.2.28), comparând cu forma generală (2.2.2) a ecuației, rezultă

$$p_1(x) = -\frac{1}{W(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x), \tag{2.2.32}$$

sau, integrând o dată,

$$\ln\left|W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\right| = -\int p_1(x)\mathrm{d}x + \ln|C|. \tag{2.2.33}$$

Trecând la exponențială, obținem ***formula lui Liouville***, şi anume

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = C \cdot \mathrm{e}^{-\int p_1(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.2.34}$$

UNICITATEA.

Deoarece $\dim \operatorname{Ker} L = n$, înseamnă că $n+1$ soluții ale unei ecuații lineare şi omogene, de ordinul n, sunt linear dependente.

Presupunem că sistemului fundamental $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ îi corespund două asemenea ecuații lineare şi omogene, diferite

$$\begin{aligned} &L_1 y \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \\ &L_2 y \equiv y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}(x)y' + q_n(x)y = 0. \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Scăzând membru cu membru cele două ecuații, obținem

$$\begin{aligned} &(p_1 - q_1)y^{(n-1)} + (p_2 - q_2)y^{(n-2)} + \ldots + (p_{n-1} - q_{n-1})y' + \\ &+ (p_n - q_n)y = 0. \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Deoarece oricare $y_j, j = \overline{1,n}$ satisface ambele ecuației (2.2.35), rezultă că ea satisface şi (2.2.36). Dacă $p_1 \neq q_1$, ordinul ecuației este, evident, $(n-1)$. Cum $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ este sistem fundamental, înseamnă că ecuația (2.2.36), de ordinul $(n-1)$, admite n soluții linear independente, ceea ce reprezintă o ***contradicție***.

Deci $p_1(x) \equiv q_1(x), \forall x \in \mathrm{I}$.

Analog se demonstrează că $p_k(x) \equiv q_k(x), \forall x \in \mathrm{I}$, pentru orice $k = \overline{2,n}$. ◘

Exemple

1. Fie sistemul fundamental $\{e^x, e^{-x}\}$. Să se determine EDO corespunzătoare.

a) Ordinul ecuației este 2. Am calculat anterior $W[e^x, e^{-x}] = -2$, arătând astfel că $\{e^x, e^{-x}\}$ este un sistem linear independent.

b) **C**onform consideraților precedente, dacă y e o soluție oarecare a ecuației, sistemul $\{e^x, e^{-x}, y\}$ este linear dependent şi deci Wronskianul lui se anulează

$$W[e^x, e^{-x}, y] \equiv 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0, \tag{2.2.37}$$

deci

$$y''\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.38}$$

În final, ecuația căutată este $Ly \equiv y'' - y = 0$, după simplificarea cu -2.

2. Să se determine EDO de sistem fundamental $\{\cos x, \sin x\}$.

a) Numărul funcțiilor sistemului fundamental este 2, deci ordinul ecuației căutate este 2.

Verificăm linear independența:

$$W[\sin x, \cos x] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \tag{2.2.39}$$

b) Ecuația căutată este dată de Wronskianul

$$W[\sin x, \cos x, y] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y \\ \cos x & -\sin x & y' \\ -\sin x & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.40}$$

Calculând acest determinant după ultima coloană, deducem

$$y''\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.41}$$

Deci ecuația este, după împărțirea cu $W[\sin x, \cos x] = -1$:

$$Ly \equiv y'' + y = 0. \tag{2.2.42}$$

2.3. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n, LINEARE ŞI NEOMOGENE

Reluăm ecuația diferențială lineară şi neomogenă

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{2.3.1}$$

unde $p_j, f \in C^0(I)$.

Putem demonstra câteva fapte matematice de mare importanță pentru rezolvarea ei.

I. *Dacă* Y *este o soluție particulară a ecuației neomogene* (2.3.1), *iar* z *este soluția generală a EDO omogene asociate* $Ly = 0$, *rezultă că* ***soluția generală*** *a EDO neomogene este*

$$y = Y + z. \tag{2.3.2}$$

Demonstrație. Să facem schimbarea de funcție $y = Y + z$, z fiind noua funcție necunoscută. Introducem în (2.3.1) şi, ținând cont că L este linear, rezultă

$$\left.\begin{cases} Ly = L(Y+z) = LY + Lz = f + Lz \\ Ly = f \end{cases}\right| \Rightarrow f = f + Lz \Rightarrow Lz = 0. \tag{2.3.3}$$

deci

$$z \in \operatorname{Ker} L. \tag{2.3.4}$$

II. *Presupunem că termenul liber f al ecuației* (2.3.1) *este o sumă de forma*

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k, \tag{2.3.5}$$

şi fie Y_j *soluțiile particulare corespunzătoare fiecărui* f_j, *adică*

$$LY_j = f_j,\ j = \overline{1,k}. \tag{2.3.6}$$

Atunci

$$Y = \sum_{j=1}^{k} Y_j \tag{2.3.7}$$

este soluție particulară pentru ecuația neomogenă $LY = f$.

Demonstrația se face prin calcul direct. Avem, ținând seama şi de (2.3.6),

$$LY = L\left(\sum_{j=1}^{k} Y_j\right) \underset{L\text{ linear}}{\equiv} \sum_{j=1}^{k} LY_j = \sum_{j=1}^{k} f_j = f \tag{2.3.8}$$

III. *Dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluții pentru ecuația* (2.2.23), *atunci putem determina o soluție particulară pentru ecuația neomogenă* (2.3.1) *folosind* ***metoda variației constantelor***.

Demonstrație. Considerăm cazul $n = 3$, generalizarea fiind imediată.

Fie

$$Ly \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = f(x), \tag{2.3.9}$$

şi $\{y_1, y_2, y_3\} \subset \operatorname{Ker} L$ un sistem fundamental de soluții.

Atunci $Ly_j = 0, j = \overline{1,3}$. Soluția generală a ecuației omogene asociate este, conform rezultatului de la **I**, $y = Y + z$, unde z este soluția generală a ecuației omogene asociate lui (2.3.9):

$$Ly \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0. \tag{2.3.10}$$

Deoarece $\{y_1, y_2, y_3\}$ este un sistem fundamental, el reprezintă o bază în $\operatorname{Ker} L$, astfel încât z se exprimă ca o combinație lineară de funcțiile sistemului

$$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x). \tag{2.3.11}$$

Ca şi în cazul ecuațiilor diferențiale ordinare lineare de ordinul I, căutăm pe Y sub forma

$$Y(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + c_3(x)y_3. \tag{2.3.12}$$

Rezultă, reconstituind ecuația

$$\begin{array}{l|l|}
Y(x)=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3 & p_3(x) \\
Y'=c_1y_1'+c_2y_2'+c_3y_3'+\underbrace{c_1'y_1+c_2'y_2+c_3'y_3}_{=0} & p_2(x) \\
Y''=c_1y_1''+c_2y_2''+c_3y_3''+\underbrace{c_1'y_1'+c_2'y_2'+c_3'y_3'}_{=0} & p_1(x) \\
Y'''=c_1y_1'''+c_2y_2'''+c_3y_3'''+c_1'y_1''+c_2'y_2''+c_3y_3'' & 1
\end{array}+ \tag{2.3.13}$$

$$LY=\underbrace{c_1Ly_1}_{=0}+\underbrace{c_2Ly_2}_{=0}+\underbrace{c_3Ly_3}_{=0}+c_1'y_1''+c_2'y_2''+c_3'y_3''=f\,.$$

Deci c_1', c_2', c_3' satisfac sistemul algebric linear

$$\begin{aligned}
&c_1'y_1+c_2'y_2+c_3'y_3=0,\\
&c_1'y_1'+c_2'y_2'+c_3'y_3'=0,\\
&c_1'y_1''+c_2'y_2''+c_3'y_3''=f.
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Determinantul asociat acestui sistem este chiar Wronskianul sistemului fundamental, deci este nenul pe I:

$$W[y_1,y_2,y_3]\equiv\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x)\\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x)\end{vmatrix}\neq 0,\qquad x\in \mathrm{I}\,. \tag{2.3.15}$$

Prin urmare, sistemul (2.3.14) admite soluție unică. Fie

$$c_j'=\varphi_j(x),\ j=\overline{1,3}, \tag{2.3.16}$$

această soluție. Integrând, obținem

$$c_j=\int\varphi_j(x)\mathrm{d}x,\ j=\overline{1,3}. \tag{2.3.17}$$

IV. Concluzie: *Dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluții pentru ecuația neomogenă* (2.3.1), *atunci soluția sa generală se determină prin cuadraturi (integrări, primitive).*

Demonstrație. Dacă $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$ este sistem fundamental de soluții, rezultă că soluția generală a ecuației omogene asociate lui (2.3.1), adică $Ly = 0$, este

$$y_{\text{omog}} = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j, \quad x \in \mathrm{I}. \tag{2.3.18}$$

Atunci

I. Conform punctului **III**, o soluție particulară Y a lui (2.3.1) este

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \left(\int \varphi_j(x) \mathrm{d}x \right) \cdot y_j, \tag{2.3.19}$$

unde $c'_j = \varphi_j$ sunt soluții ale sistemului algebric

$$\begin{aligned} &c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \ldots + c'_n y_n = 0, \\ &c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \ldots + c'_n y'_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \ldots + c'_n y'_n = f. \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

II. Conform **I**, $y = Y + z$, deci soluția generală a ecuației (2.3.1) este

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\int \varphi_j(x) dx \right) \cdot y_j, \tag{2.3.21}$$

unde $\varphi_j = c'_j$, $j = \overline{1,n}$ satisfac sistemul (2.3.20).

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$Ly \equiv y'' - y = \mathrm{e}^{2x}. \tag{2.3.22}$$

ETAPA 1. Ecuația omogenă asociată este

$$Ly \equiv y'' - y = 0, \tag{2.3.23}$$

și admite sistemul fundamental de soluții $\{\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}\}$ (s-au determinat în exemplele precedente).

Soluția generală a EDO omogene este

$$y_{\text{omog}} = c_1 \mathrm{e}^{x} + c_2 \mathrm{e}^{-x}. \tag{2.3.24}$$

ETAPA 2. Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene, de forma

$$Y = c_1(x)\mathrm{e}^{x} + c_2(x)\mathrm{e}^{-x}. \tag{2.3.25}$$

Introducând în ecuație, rezultă

$$\left.\begin{aligned} &Y = c_1(x)\mathrm{e}^{x} + c_2(x)\mathrm{e}^{-x} \\ &Y' = c_1(x)\mathrm{e}^{x} - c_2(x)\mathrm{e}^{-x} + \underbrace{c_1'(x)\mathrm{e}^{x} + c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}}_{=0} \\ &Y'' = c_1(x)\mathrm{e}^{x} + c_2(x)\mathrm{e}^{-x} + c_1'(x)\mathrm{e}^{x} - c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}\right| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \Bigg| + \tag{2.3.26}$$

$$Ly = \quad / \quad + \quad / \quad + c_1'(x)\mathrm{e}^{x} - c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{2x}.$$

Trebuie deci să rezolvăm sistemul

$$\begin{aligned} c_1'\mathrm{e}^{x} + c_2'\mathrm{e}^{-x} &= 0, \\ c_1'\mathrm{e}^{x} - c_2'\mathrm{e}^{-x} &= \mathrm{e}^{2x}. \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

Determinantul asociat coincide cu Wronskianul:

$$\Delta = W\left[\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}\right] = -2. \tag{2.3.28}$$

Rezultă soluția unică

$$\begin{aligned} c_1' &= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, \\ c_2' &= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{x} & 0 \\ \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}. \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Integrând, obținem

$$c_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, c_2 = -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x}, \tag{2.3.30}$$

astfel încât, conform lui (2.3.25), soluția particulară *Y* are expresia

$$Y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} \cdot \mathrm{e}^{-x}, \qquad (2.3.31)$$

de unde rezultă

$$Y = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}. \qquad (2.3.32)$$

Soluția generală a ecuației neomogene (2.3.22) este deci

$$\boxed{y(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}}. \qquad (2.3.33)$$

Observație. În cazul coeficienților p_j constanți, soluția particulară Y se caută, mai uşor, sub forma funcțiilor elementare din membrul drept (termenul liber f).

Exemplu. Dacă reluăm ecuația (2.3.22), îl putem căuta pe Y sub forma $Y = k\mathrm{e}^{2x}$. Introducând această expresie în ecuație, obținem

$$\begin{array}{l|c|l} Y = k\mathrm{e}^{2x} & -1 & \\ Y' = 2k\mathrm{e}^{2x} & 0 & + \\ Y'' = 4k\mathrm{e}^{2x} & 1 & \\ \hline \end{array}$$
$$LY = (4k - k)\mathrm{e}^{2x} = 3k\mathrm{e}^{2x}. \qquad (2.3.34)$$

Trebuie deci să avem

$$3ke^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}; \qquad (2.3.35)$$

rezultă $\boxed{Y = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}}$, soluție particulară obținută mai simplu decât folosind metoda variației constantelor.

2.4. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE DE ORDINUL n, CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Forma generală a acestor ecuații este

$$Ly \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2.4.1}$$

unde $a_k \in \Re, k = \overline{0,n}$.

Am văzut că soluția generală a unei ecuații diferențiale ordinare lineare şi neomogene se exprimă ca o sumă dintre o soluție particulară a sa şi soluția generală a ecuației omogene asociate. Cunoaşterea unui sistem fundamental de soluții a ecuației omogene asociate conduce imediat la soluția generală a ecuației neomogene.

2.4.1. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE ŞI OMOGENE

Fie deci

$$Ly \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2.4.2}$$

ecuația omogenă asociată lui (2.4.1). Operatorul *L*, definit prin membrul stâng al acestei ecuații, este linear, în sensul aceleiaşi definiții dată la ecuațiile diferențiale de ordinul I. Şi în acest caz recunoaştem un operator linear după faptul că funcția necunoscută şi derivatele sale până la ordinul *n* inclusiv apar la puterea a I-a. Nucleul operatorului este

$$\ker L = \left\{ y \in C^n(\Re) \middle| Ly = 0 \right\}, \tag{2.4.3}$$

deci

Mulțimea soluțiilor ecuației (2.4.2) ***coincide cu*** ker *L*.

După cum am arătat în paragraful 2.2, dimensiunea lui ker *L* este *n*. Rezultă deci că

Pentru rezolvarea unei ecuații lineare de ordinul n ***trebuie să găsim o bază în*** ker *L*.

Reamintim că o bază a unui spațiu vectorial n-dimensional este o mulțime formată din n elemente linear independente ale spațiului. Fie $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ o bază în ker L. Atunci soluția generală a ecuației (2.4.2) se scrie ca o combinație lineară cu coeficienți arbitrari de elementele bazei, deci

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x). \tag{2.4.4}$$

MOD DE REZOLVARE

În cazul coeficienților constanți, se caută soluții de forma exponențială $y = \mathrm{e}^{rx}$, ***după ideea lui Leonhard Euler***. Derivăm succesiv și introducem în ecuație:

$$\begin{array}{ll}
a_n \times & y = \mathrm{e}^{rx} \\
a_{n-1} \times & y' = r\mathrm{e}^{rx} \\
a_{n-2} \times & y'' = r^2 \mathrm{e}^{rx} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_1 \times & y^{(n-1)} = r^{n-1}\mathrm{e}^{rx} \\
a_0 \times & y^{(n)} = r^n \mathrm{e}^{rx} \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{Ly = \mathrm{e}^{rx}\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots a_{n-1} r + a_n\right) = 0,}
\end{array} \tag{2.4.5}$$

deci, pentru ca e^{rx} să fie soluție trebuie ca

$$\boxed{a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots a_{n-1} r + a_n = 0}. \tag{2.4.6}$$

Ecuația (2.4.6) se numeşte ***ecuație caracteristică***. Ea admite întotdeauna n rădăcini în corpul complex. Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ aceste rădăcini.

A. ***Rădăcini reale şi distincte***. În acest caz, baza din ker L pe care o căutăm este formată din funcțiile $\mathrm{e}^{r_1 x}, \mathrm{e}^{r_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{r_n x}$, prin următoarea corespondență

$$\begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & & r_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & e^{r_3 x} & & e^{r_n x} \end{array}, \tag{2.4.7}$$

prin urmare soluția generală a ecuației este

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}. \tag{2.4.8}$$

B. *Rădăcini complex conjugate*. Fie $r_1 = a + \mathrm{i}b$. Atunci ecuația caracteristică, având coeficienți reali, mai admite şi pe $r_2 = a - \mathrm{i}b$ ca rădăcină. Pentru simplitatea expunerii, să presupunem că celelalte rădăcini sunt reale. Pentru a rămâne în cadrul real, vom înlocui $e^{(a+\mathrm{i}b)x}, e^{(a-\mathrm{i}b)x}$ cu combinații lineare reale ale acestora, folosind formulele lui Euler (vezi cursul de Analiză Matematică, Calcul Diferențial):

$$\begin{aligned} e^{ax}\cos bx &= e^{ax}\frac{e^{\mathrm{i}bx} + e^{-\mathrm{i}bx}}{2}, \\ e^{ax}\sin bx &= e^{ax}\frac{e^{\mathrm{i}bx} - e^{-\mathrm{i}bx}}{2\mathrm{i}}. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Atunci schema (2.4.7) devine

$$\begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & & r_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx & e^{r_3 x} & & e^{r_n x} \end{array}, \tag{2.4.10}$$

şi soluția generală a ecuației este

$$y(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + c_3 e^{r_3 x} \ldots + c_n e^{r_n x}. \tag{2.4.11}$$

C. *Rădăcini multiple.* Spre deosebire de cazurile precedente, acesta necesită şi alte precizări. Nu putem folosi direct schema (2.4.7), deoarece am obține, evident, un sistem linear dependent.

Să considerăm mai întâi ecuația de ordinul II

$$Ly \equiv ay'' + by' + cy = 0. \tag{2.4.12}$$

Presupunem că ecuația sa caracteristică

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{2.4.13}$$

admite rădăcinile reale r_1, r_2, foarte apropiate ca valoare, dar, totuşi, distincte. Atunci putem folosi schema (2.4.7), care, în acest caz, devine

$$\begin{matrix} r_1 & r_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \end{matrix}. \tag{2.4.14}$$

Dacă $r_2 \to r_1$, atunci schema nu funcționează. Pentru a înlătura acest inconvenient, putem înlocui pe $e^{r_2 x}$ cu combinația lineară

$$\frac{e^{r_2 x} - e^{r_1 x}}{r_2 - r_1}, \tag{2.4.15}$$

care, evident, este şi ea soluție a ecuației (2.4.12). Trecând la limită pentru $r_2 \to r_1$, obținem

$$\lim_{r_2 \to r_1} \frac{e^{r_2 x} - e^{r_1 x}}{r_2 - r_1} = \lim_{r_2 \to r_1} \frac{\frac{d}{dr_2}\left(e^{r_2 x} - e^{r_1 x}\right)}{\frac{d}{dr_2}\left(r_2 - r_1\right)} = \lim_{r_2 \to r_1} \frac{x e^{r_2 x}}{1} = x e^{r_1 x}. \tag{2.4.16}$$

Înseamnă că, dacă $r_2 = r_1$, putem considera pentru ecuația (2.4.12) schema

$$\begin{matrix} r_1 & r_1 \\ \downarrow & \downarrow \\ e^{r_1 x} & x e^{r_1 x} \end{matrix}. \tag{2.4.17}$$

Într-adevăr, cele două funcții din schemă sunt soluții ale ecuației şi sunt şi linear independente, deoarece Wronskianul lor

$$W\left[e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}\right] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & x e^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & x r_1 e^{r_1 x} + e^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2 r_1 x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ r_1 & x r_1 + 1 \end{vmatrix} = e^{2 r_1 x} \tag{2.4.18}$$

este nenul. Soluția generală a ecuației (2.4.12) este

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}, \tag{2.4.19}$$

sau

$$y(x) = e^{r_1 x}(c_1 + c_2 x). \tag{2.4.20}$$

Ne situăm acum în cazul general. Presupunem, pentru simplitate, că r_1 este rădăcină multiplă de ordinul m a ecuației caracteristice (2.4.6), iar celelalte rădăcini $r_{m+1}, r_{m+2}, \dots, r_n$ sunt reale şi distincte. La fel ca mai înainte, se demonstrează că în acest caz schema (2.4.7) devine

$$\begin{matrix} r_1 & r_1 & & r_1 & r_{m+1} & & r_n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ e^{r_1 x} & x e^{r_1 x} & & x^{m-1} e^{r_1 x} & e^{r_{m+1} x} & & e^{r_n x} \end{matrix}, \tag{2.4.21}$$

şi deci soluția generală a ecuației este

$$y(x) = e^{r_1 x}\left(c_1 + c_2 x + \dots c_m x^{m-1}\right) + c_3 e^{r_3 x} \dots + c_n e^{r_n x}. \tag{2.4.22}$$

CONCLUZIE: Pentru ecuațiile diferențiale ordinare cu coeficienți constanți putem determina efectiv întotdeauna un sistem fundamental de soluții, exprimat prin funcții elementare.

Exemple. Să se determine soluția generală a următoarelor ecuații diferențiale ordinare:

a) $Ly \equiv y'' - 3y' + 2y = 0$.

Este o ecuație diferențială lineară, de ordinul II, cu coeficienți constanți.

Dimensiunea lui ker L este 2. Căutând soluții de forma exponențială $y = e^{rx}$, deducem că r trebuie să satisfacă ecuația caracteristică

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

care admite rădăcinile reale şi distincte $r_1 = 1, r_2 = 2$. Suntem în cazul **A**.

Soluția generală este, conform formulei (2.4.8),

$$\boxed{y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.}$$

b) $Ly \equiv y'' + y = 0$.

Este o ecuație lineară, de ordinul II, cu coeficienți constanți.

Dimensiunea lui ker L este 2. Căutând soluții de forma exponențială $y = e^{rx}$, deducem că r trebuie să satisfacă ecuația caracteristică

$$r^2 + 1 = 0,$$

care admite rădăcinile pur imaginare, complex conjugate $r_1 = +i, r_2 = -i$.

Soluția generală este, conform formulei (2.4.11)

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.}$$

c) $Ly \equiv y'' + 2y' + y = 0$.

Este o ecuație diferențială ordinară lineară, de ordinul II, cu coeficienți constanți.

Dimensiunea lui ker L este 2. Căutând soluții de forma exponențială $y = e^{rx}$, deducem că r trebuie să satisfacă ecuația caracteristică

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

care admite rădăcina dublă $r = -1$. Soluția generală este, conform formulei (2.4.22)

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}.}$$

APLICAȚIE: OSCILATORUL ARMONIC

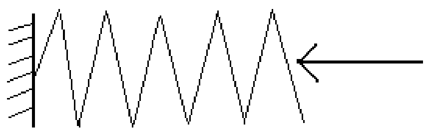


Figura 2.4.1. Oscilatorul armonic.

Începem prin a construi modelul matematic asociat acestui fenomen fizic.

Această construcție presupune, după cum am mai arătat,

♣ stabilirea ***mărimii*** (sau ***mărimilor***) ***fizice*** care determină cunoaşterea completă a fenomenului fizic; ele vor juca rolul ***funcțiilor necunoscute***;

♣ stabilirea ***legii*** (sau ***legilor***) ***fizice*** care guvernează fenomenul şi exprimarea lor în termeni matematici.

MODELUL MATEMATIC AL OSCILATORULUI ARMONIC

1. ***Funcția necunoscută*** este în acest caz ***deplasarea*** $y = y(t)$, având, evident, o singură componentă.

2. ***Legea fizică*** este ***legea lui Newton***: produsul masă-accelerație este egal cu rezultanta forțelor care acționează asupra sistemului, adică, în termeni matematici,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{2.4.23}$$

unde $\mathbf{a}, \mathbf{F}$ au fiecare câte o singură componentă).

F este forța elastică, expresia sa matematică fiind

$$\mathbf{F} = -ky, \quad k > 0, \tag{2.4.24}$$

iar **a** este accelerația, adică, după cum se ştie,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.4.25}$$

Pentru derivata a doua a deplasării în raport cu timpul vom folosi binecunoscuta notație din mecanică

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{y}. \tag{2.4.26}$$

Deci

$$m\ddot{y} = -ky. \tag{2.4.27}$$

Notăm $\frac{k}{m} = \omega^2 > 0$. În concluzie, modelul matematic este reprezentat de

$$\boxed{Ly \equiv \ddot{y} + \omega^2 y = 0}. \qquad (2.4.28)$$

Aceasta este o ecuație lineară, cu coeficienți constanți, omogenă. Pentru a determina un sistem fundamental de soluții, căutăm pe y de forma exponențială $y = \mathrm{e}^{\alpha t}$. Derivăm şi introducem în ecuație:

$$\begin{array}{c|l|}\omega^2 & y = \mathrm{e}^{\alpha t} \\ 0 & \dot{y} = \alpha \mathrm{e}^{\alpha t} \\ 1 & \underline{\ddot{y} = \alpha^2 \mathrm{e}^{\alpha t}}\end{array} + \Rightarrow Ly = \left(\alpha^2 + \omega^2\right)\mathrm{e}^{\alpha t} = 0. \qquad (2.4.29)$$

Rezultă ecuația caracteristică

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0, \qquad (2.4.30)$$

cu rădăcinile $\alpha_{1,2} = \pm i\omega$. Avem următorul sistem fundamental:

$$\begin{array}{cc} \mathrm{i}\omega & -\mathrm{i}\omega \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{array}. \qquad (2.4.31)$$

Pentru a evita cadrul complex, folosim ***formulele lui Euler*** (vezi cursul de Analiză Matematică, partea I). Avem:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} &= \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha, \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} &= \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha, \end{aligned} \qquad (2.4.32)$$

deci

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2} = \cos\alpha, \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}} = \sin\alpha. \qquad (2.4.33)$$

În loc de exponențialele cu exponenți complecşi, putem lua combinațiile

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} &= \cos\omega t \\ \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2} &= \sin\omega t, \end{aligned} \tag{2.4.34}$$

care sunt şi ele soluții şi formează un sistem fundamental.

Într-adevăr

$$W[\cos\omega t, \sin\omega t] = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{vmatrix} = \omega \neq 0. \tag{2.4.35}$$

Soluția generală a ecuației (2.4.28) este

$$y(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t. \tag{2.4.36}$$

În loc de constantele arbitrare c_1, c_2, vom considera alte două constante A şi δ, de asemenea arbitrare.

Luând $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, rezultă

$$y(t) = A\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\omega t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\omega t\right). \tag{2.4.37}$$

Constantele din paranteză sunt, evident, subunitare, iar suma pătratelor lor este 1, astfel încât putem lua

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \cos\delta, \quad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \sin\delta, \tag{2.4.38}$$

unde

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{c_1}{c_2}. \tag{2.4.39}$$

În final, soluția generală a ecuației oscilatorului armonic se exprimă astfel

$$\boxed{y(t) = A\cos(\omega t - \delta)}. \tag{2.4.40}$$

INTERPRETARE FIZICĂ

Reprezentând grafic funcția (2.4.40), obținem figura 2.4.2,

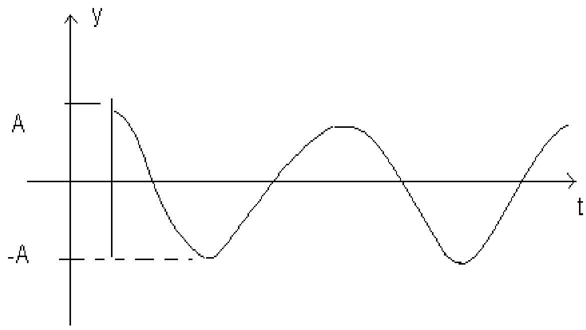


Figura 2.4.2.Reprezentarea geometrică a mişcării oscilatorului armonic

unde

- A reprezintă ***amplitudinea mişcării***
- ω reprezintă ***frecvența mişcării***
- δ reprezintă ***faza mişcării.***

Anulând argumentul cosinusului, obținem momentul $\varphi = \dfrac{\delta}{\omega}$, care corespunde amplitudinii A. Vom relua această problemă în cadrul aplicațiilor.

2.4.2. POLINOM DIFERENȚIAL

Fie din nou ecuația (2.4.1).

Observăm că ea se mai poate scrie şi în felul următor:

$$Ly \equiv a_0 \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} y + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} y + ... + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y + a_n y = f(x). \qquad (2.4.41)$$

Să notăm cu D operatorul derivată, adică

$$D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}. \qquad (2.4.42)$$

Atunci

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} = D^k, \tag{2.4.43}$$

şi operatorul L se mai poate scrie şi sub forma

$$Ly \equiv a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + ... + a_{n-1} Dy + a_n Ey = f(x), \tag{2.4.44}$$

unde am notat cu E operatorul identitate, adică

$$Ey = y. \tag{2.4.45}$$

Forma (2.4.44) mai poate fi modificată astfel

$$Ly \equiv \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n E\right) y = f(x), \tag{2.4.46}$$

Operatorul din paranteza de mai sus este, formal, un polinom de gradul n în D.

El se numeşte ***polinom diferențial***.

Vom folosi următoarea notație pentru polinomul diferențial:

$$\boxed{P_n(D) \equiv a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n E}. \tag{2.4.47}$$

Rezultă că ecuația (2.4.1) se poate scrie şi în alt mod:

$$\boxed{Ly \equiv P_n(D) y = f(x)}. \tag{2.4.48}$$

Observație. Înlocuind în (2.4.47) pe D cu r şi derivările succesive cu puteri, obținem ***polinomul caracteristic*** asociat ecuației diferențiale.

FORMULE DE CALCUL UTILE

I. Să aplicăm polinomul diferențial unei exponențiale

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{2.4.49}$$

Ținând seama de faptul că

$$D\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right) = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}, \quad D^k\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right) = \alpha^k \mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{2.4.50}$$

obținem

$$\begin{aligned}
P_n(D)\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right) &= \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n E\right)\mathrm{e}^{\alpha x} = \\
&= a_0 D^n \mathrm{e}^{\alpha x} + a_1 D^{n-1}\mathrm{e}^{\alpha x} + \ldots + a_{n-1} D\mathrm{e}^{\alpha x} + a_n E\mathrm{e}^{\alpha x} = \\
&= a_0 \alpha^n \mathrm{e}^{\alpha x} + a_1 \alpha^{n-1}\mathrm{e}^{\alpha x} + \ldots + a_{n-1}\alpha\mathrm{e}^{\alpha x} + a_n \mathrm{e}^{\alpha x} = \\
&= \left(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n\right)\mathrm{e}^{\alpha x},
\end{aligned} \tag{2.4.51}$$

deci

$$\boxed{P_n(D)\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right) = P_n(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}}. \tag{2.4.52}$$

Această formulă remarcabilă este de mare utilitate practică. De altfel, am întâlnit-o şi în paragrafele precedente, însă nu legată de polinomul diferențial, ci de ecuația caracteristică.

II. Putem demonstra o altă formulă de calcul foarte utilă, valabilă pentru orice polinom diferențial.

Lema 2.1. *Dacă* $u, v \in \mathrm{C}^n(I)$, *atunci*

$$\boxed{\begin{aligned}
P_n(D)(uv) &= uP_n(D)v + \frac{1}{1!}u' P_n'(D)v + \frac{1}{2!}u'' P_n''(D)v + \\
&+ \ldots + \frac{1}{(n-1)!}u^{(n-1)}P_n^{(n-1)}(D)v + \frac{1}{n!}u^{(n)}P_n^{(n)}(D)v.
\end{aligned}} \tag{2.4.53}$$

* Demonstrația se face folosind formula lui Leibniz

$$\begin{aligned}
D^k(uv) &= uD^k v + u' D^{k-1} v + C_n^2 u'' D^{k-2} v + \\
&+ \ldots + C_n^{n-1} u^{(n-1)} D v + v D^n u.
\end{aligned} \tag{2.4.54}$$

O vom da pentru $n = 2$. Pentru n arbitrar, rezultă imediat prin inducție completă. Fie operatorul

$$P(D) \equiv aD^2 + bD + cE\,. \tag{2.4.55}$$

Avem

$$\begin{array}{l|l} D^2(uv)=uD^2v+C_2^1DuDv+vD^2u & \times a \\ D(uv)=uDv+vDu & \times b \\ E(uv)=uv & \times c \end{array}$$
$$\begin{aligned} P(D)(uv)=&\,u\left(aD^2v+bDv+cv\right)+ \\ &+Du\left(aC_2^1Dv+bEv\right)+ \\ &+avD^2u. \end{aligned} \tag{2.4.56}$$

Observăm că

$$\begin{aligned} &u\left(aD^2v+bDv+cEv\right)=uP(D)v, \\ &Du\left(aC_2^1Dv+bEv\right)=Du(2aDv+bEv)=DuP'(D)v, \\ &D^2u(av)=\frac{1}{2}D^2u(2av)=\frac{1}{2!}D^2uP''(D)v. \end{aligned} \tag{2.4.57}$$

Formula (2.4.53) este astfel demonstrată. ◘

2.4.3. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE ȘI NEOMOGENE

Conform celor spuse în paragraful anterior, deoarece în cazul ecuațiilor diferențiale ordinare cu coeficienți constanți se determină întotdeauna un sistem fundamental de soluții sub formă de funcții elementare, rămâne să determinăm o soluție particulară a ecuației neomogene

$$Ly\equiv a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \tag{2.4.58}$$

Desigur, putem aplica metoda variației constantelor, însă, în cazul coeficienților constanți, dacă termenul liber se exprimă prin funcții elementare, putem găsi metode mai simple decât aceasta.

Distingem mai multe cazuri:

A. ***Termenul liber este polinom de gradul*** *m* ***în*** *x*, adică

$$f(x)=P_m(x). \tag{2.4.59}$$

Atunci

- Dacă $a_n \neq 0$, căutăm soluția particulară $Y(x)$ pentru ecuația $LY = P_m(x)$ sub forma unui polinom de acelaşi grad, deci

$$Y(x)=Q_m(x). \tag{2.4.60}$$

Coeficienții lui $Q_m(x)$ se determină simplu, prin identificare.

Exemplu. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația

$$Ly \equiv y''' + y'' - y' - y = x^2 + 1. \tag{2.4.61}$$

Soluție. Ecuația (2.4.61) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este un polinom de gradul 2, iar $a_3 \equiv -1 \neq 0$. Putem căuta soluția particulară sub forma polinomului de gradul 2

$$Y(x) \equiv Q_2(x) = ax^2 + bx + c. \tag{2.4.62}$$

Derivând şi introducând în ecuație, obținem

$$2a - (2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1, \tag{2.4.63}$$

sau

$$-ax^2 - (2a + b)x + 2a - b - c = x^2 + 1, \tag{2.4.64}$$

Identificând coeficienții, rezultă

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = -5, \tag{2.4.65}$$

deci soluția particulară căutată este

$$\boxed{Y(x) = -x^2 + 2x - 5}. \tag{2.4.66}$$

- Dacă $a_n, a_{n-1}, ..., a_{n-r}$ ($r < n$) sunt nuli, căutăm pe Y sub forma

$$Y(x) = x^{r-1} Q_m(x). \tag{2.4.67}$$

Exemplu. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația diferențială ordinară lineară şi neomogenă

$$Ly \equiv y''' + y'' = x + 1. \tag{2.4.68}$$

Soluție. Ecuația (2.4.68) este cu coeficienți constanți. Termenul liber este un polinom de gradul unu, iar $a_3 = 0, a_2 = 0$. Căutăm, deci, soluția particulară sub forma

$$Y(x) = x^2 Q_1(x) = x^2 (ax + b). \tag{2.4.69}$$

Derivând şi introducând în ecuație, obținem

$$6a + (6ax + 2b) = x + 1, \tag{2.4.70}$$

sau

$$6ax + 6a + 2b = x + 1, \tag{2.4.71}$$

Identificând coeficienții, rezultă

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = 0, \tag{2.4.72}$$

deci soluția particulară căutată este

$$\boxed{Y(x) = \frac{1}{6} x^3}. \tag{2.4.73}$$

B. ***Termenul liber este o exponențială***, adică

$$f(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{2.4.74}$$

Distingem şi aici două cazuri:

- α nu este rădăcină a ecuației caracteristice, deci $P_n(\alpha) \neq 0$. În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma termenului liber, adică

$$Y(x) = a\mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{2.4.75}$$

Derivând şi introducând în ecuație, obținem

$$aP_n(\alpha)e^{\alpha x} = Ae^{\alpha x}, \tag{2.4.76}$$

de unde, prin identificare, deducem

$$a = \frac{A}{P_n(\alpha)}. \tag{2.4.77}$$

Exemplu. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația

$$Ly \equiv y'' - 3y' + 2y = e^{3x}. \tag{2.4.78}$$

Soluție. Ecuația (2.4.78) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este de forma unei exponențiale (2.4.75), cu $\alpha = 3$. Ecuația se mai poate scrie şi cu ajutorul polinomului diferențial

$$Ly \equiv \left(\underbrace{D^2 - 3D + 2E}_{P(D)}\right)y = e^{3x}. \tag{2.4.79}$$

Ecuația caracteristică asociată este

$$r^2 - 3r + 2 = 0, \tag{2.4.80}$$

cu rădăcinile

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2; \tag{2.4.81}$$

nici una nu coincide cu α. Căutăm, deci, soluția particulară sub forma

$$Y(x) = ae^{x}. \tag{2.4.82}$$

Derivăm şi introducem în ecuație

$$P(D)\left(ae^{3x}\right) = a \cdot P\left(e^{3x}\right) = ae^{3x}(9 - 3 \cdot 3 + 2) = 2ae^{3x}, \tag{2.4.83}$$

de unde deducem

$$2ae^{3x} = e^{3x} \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}. \tag{2.4.84}$$

Soluția particulară este deci

$$\boxed{Y(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}}. \tag{2.4.85}$$

- α este rădăcină multiplă de ordinul $m,\ m\le n$, a ecuației caracteristice, deci

$$P_n(\alpha)=0,\quad P_n'(\alpha)=0,\quad P_n''(\alpha)=0,\quad ...P_n^{(m-1)}(\alpha)\neq 0, \tag{2.4.86}$$

dar

$$P_n^{(m)}(\alpha)\neq 0. \tag{2.4.87}$$

În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$Y(x)=ax^m\mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{2.4.88}$$

Derivăm folosind formula (2.4.53), luând $u=ax^m, v=\mathrm{e}^{\alpha x}$. Introducând în ecuație, obținem

$$\begin{aligned}&a_0ax^m\underbrace{P_n(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}}_{=0}+a_1max^{m-1}\underbrace{P_n'(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}}_{=0}+...+\\&+\frac{1}{(m-1)!}(m-1)!ax\cdot a_{m-1}\underbrace{P_n^{(m-1)}(\alpha)\mathrm{e}}_{=0}{}^{\alpha x}+\\&+\frac{1}{m!}m!a\cdot a_mP_n^{(m)}(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}=A\mathrm{e}^{\alpha x},\end{aligned} \tag{2.4.89}$$

de unde, prin identificare, deducem

$$a=\frac{A}{a_mP_n^{(m)}(\alpha)}. \tag{2.4.90}$$

Exemplu. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația

$$Ly\equiv y'''-3y''+3y'-y=\mathrm{e}^x. \tag{2.4.91}$$

Soluție. Ecuația (2.4.91) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți.

Termenul liber este de forma unei exponențiale (2.4.75), cu $\alpha=1$. Ecuația se mai scrie şi cu ajutorul polinomului diferențial

$$Ly \equiv \Big(\underbrace{D^3 - 3D^2 + 3D - E}_{P(D)}\Big) y = \mathrm{e}^x. \tag{2.4.92}$$

Ecuația caracteristică asociată este

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0, \tag{2.4.93}$$

care se mai scrie şi

$$(r-1)^3 = 0. \tag{2.4.94}$$

Rezultă că 1 este rădăcină triplă a ecuației caracteristice. Căutăm, deci, soluția particulară sub forma

$$Y(x) = ax^3\mathrm{e}^x. \tag{2.4.95}$$

Derivăm folosind formula (2.4.53), luând $u = ax^3$, $v = \mathrm{e}^{\alpha x}$. Calculăm mai întâi

$$\begin{aligned} &P'(D) = 3D^2 - 6D + 3E = 3(D-E)^2, \\ &P''(D) = 6D - 6E = 3!(D-E), \\ &P'''(D) = 6E. \end{aligned} \tag{2.4.96}$$

Evident,

$$P(D)\mathrm{e}^x = 0, \quad P'(D)\mathrm{e}^x = 0, \quad P''(D)\mathrm{e}^x = 0, \quad P'''(D)\mathrm{e}^x = 6\mathrm{e}^x. \tag{2.4.97}$$

Aplicând formula (2.4.53), obținem

$$P(D)\left(ax^3\mathrm{e}^x\right) = ax^3\underbrace{P\left(\mathrm{e}^x\right)}_{=0} + 3ax^2\underbrace{P'\left(\mathrm{e}^x\right)}_{=0} + \frac{1}{2!}6ax\underbrace{P''\left(\mathrm{e}^x\right)}_{=0} + \frac{1}{3!}3!a \cdot P'''\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^x, \tag{2.4.98}$$

de unde, ținând seama şi de (2.4.97), deducem

$$a = \frac{1}{6}. \tag{2.4.99}$$

Soluția particulară este deci

$$Y(x) = \frac{1}{6} x^3 e^x . \tag{2.4.100}$$

C. ***Termenul liber este o exponențială înmulțită cu un polinom,*** adică

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} . \tag{2.4.101}$$

Distingem din nou două cazuri:

- α nu este rădăcină a ecuației caracteristice. În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma termenului liber, adică

$$Y(x) = Q_m(x) e^{\alpha x} . \tag{2.4.102}$$

Exemplu. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația diferențială ordinară

$$Ly \equiv y'' - 3y' + 2y = x e^{3x} . \tag{2.4.103}$$

Soluție. Ecuația (2.4.103) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este de forma (2.4.101), unde $\alpha = 3$, iar $P_m(x) = x$. Am arătat mai sus că ecuația se mai scrie şi cu ajutorul polinomului diferențial (2.4.79) şi am calculat rădăcinile ecuației caracteristice (2.4.80), care nu coincid cu α . Căutăm soluția particulară sub forma

$$Y(x) = (ax + b) e^{3x} . \tag{2.4.104}$$

Derivăm folosind formula (2.4.53), pentru $u = ax + b, v = e^{3x}$. Ținând seama de faptul că

$$\begin{aligned} P'(D) &= 2D - 3E, \\ P''(D) &= 2E, \end{aligned} \tag{2.4.105}$$

obținem

$$\begin{aligned} &P(D)\left((ax + b) e^{3x}\right) = (ax + b) \cdot P\left(e^{3x}\right) + aP'\left(e^{3x}\right) = \\ &= (ax + b)(9 - 3 \cdot 3 + 2) + a \cdot (6 - 3) = (2ax + 3a + 2b) e^{3x}, \end{aligned} \tag{2.4.106}$$

de unde

$$(2ax + 3a + 2b)e^{3x} = xe^{3x} \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2},\, b = -\frac{3}{4}. \tag{2.4.107}$$

Soluția particulară este deci

$$\boxed{Y(x) = \frac{1}{4}(2x - 3)e^{3x}}. \tag{2.4.108}$$

- α este rădăcină multiplă de ordinul r, $r \le n$, a ecuației caracteristice. În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$Y(x) = x^r Q_m(x)e^{\alpha x}. \tag{2.4.109}$$

În ambele cazuri formula (2.4.53) este foarte utilă.

Observație. Dacă α este rădăcină multiplă a ecuației caracteristice, este mai simplu să folosim mai întâi schimbarea de funcție

$$y(x) = z(x)e^{\alpha x}. \tag{2.4.110}$$

Aplicând formula (2.4.53), obținem o ecuație diferențială ordinară în z, în care exponențiala se simplifică şi al cărui termen liber este un polinom; suntem deci într-unul din cazurile **A**.

Exemplu. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația diferențială

$$Ly \equiv y''' - 3y'' + 3y' - y = x^5 e^x. \tag{2.4.111}$$

Soluție. Ecuația (2.4.111) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este de forma (2.4.101), cu $\alpha = 1$. Am mai scris ecuația cu ajutorul polinomului diferențial (2.4.92) şi am arătat că ecuația sa caracteristică admite pe 1 ca rădăcină multiplă de ordinul 3.

Efectuăm echimbarea de funcție

$$y(x) = z(x)e^{\alpha x}, \tag{2.4.112}$$

folosind formula (2.4.53) pentru $u = z(x), v = \mathrm{e}^{\alpha x}$ şi ținând seama de calculele derivatelor formale ale polinomului diferențial din (2.4.96). Obținem

$$P(D)\left(z\mathrm{e}^{x}\right) = z\underbrace{P\left(\mathrm{e}^{x}\right)}_{=0} + z'\underbrace{P'\left(\mathrm{e}^{x}\right)}_{=0} + \frac{1}{2!}z''\underbrace{P''\left(\mathrm{e}^{x}\right)}_{=0} + \frac{1}{3!}z''' \cdot P'''\left(\mathrm{e}^{x}\right) = x^5\mathrm{e}^{x}, \tag{2.4.113}$$

de unde deducem, după simplificarea cu e^{x},

$$z''' = x^5. \tag{2.4.114}$$

Aceasta este o ecuație diferențială ordinară lineară şi neomogenă, de ordinul III în *z*. O soluție particulară a sa se obține imediat prin integrare directă

$$Z(x) = \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8}x^8. \tag{2.4.115}$$

Soluția particulară căutată pentru ecuația (2.4.109) este deci

$$\boxed{Y(x) = \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8}x^8\mathrm{e}^{x}}. \tag{2.4.116}$$

D. ***Termenul liber este o funcție trigonometrică*** (sin, cos)

$$f(x) = a\sin\alpha x + b\cos\alpha x. \tag{2.4.117}$$

Distingem din nou două cazuri:

- iα nu este rădăcină a ecuației caracteristice. În acest caz, căutăm o soluție particulară a EDO neomogene de forma termenului liber, adică

$$Y(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x. \tag{2.4.118}$$

Exemplu. Să se determine o soluție particulară pentru ecuația diferențială

$$Ly \equiv y'' - 5y' + 4y = \cos x. \tag{2.4.119}$$

Soluție. Ecuația (2.4.78) este lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Termenul liber este de forma (2.4.118), cu $\alpha = 1$. Ecuația se mai poate scrie şi cu ajutorul polinomului diferențial

$$Ly \equiv \left(\underbrace{D^2 - 5D + 4E}_{P(D)} \right) y = \cos x. \tag{2.4.120}$$

Ecuația caracteristică asociată este

$$r^2 - 5r + 4 = 0, \tag{2.4.121}$$

cu rădăcinile reale

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 4. \tag{2.4.122}$$

Căutăm soluția particulară sub forma:

$$Y(x) = a\cos x + b\sin x. \tag{2.4.123}$$

Derivăm şi introducem în ecuație:

$$\begin{aligned} &L(a\cos x + b\sin x) = (-a\cos x - b\sin x) - 5(-a\sin x + b\cos x) + \\ &+ 4(a\cos x + b\sin x) = \cos x. \end{aligned} \tag{2.4.124}$$

De aici deducem, prin identificarea coeficienților sistemul algebric,

$$\begin{cases} 3a - 5b = 1, \\ 5a + 3b = 0, \end{cases} \quad \rightarrow \quad a = \frac{3}{34}, b = -\frac{5}{34}. \tag{2.4.125}$$

Soluția particulară este

$$\boxed{Y(x) = \frac{1}{34}(3\cos x - 5\sin x)}. \tag{2.4.126}$$

- $i\alpha$ este rădăcină multiplă de ordinul m a ecuației caracteristice. În acest caz, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$Y(x) = x^m (a\cos x + b\sin x). \tag{2.4.127}$$

E. ***Dacă termenul liber este o funcție de forma***

$$f(x) = P_m(x)(a\cos \alpha x + b\sin \alpha x)e^{\beta x}, \tag{2.4.128}$$

am putea căuta din nou soluția particulară sub o formă asemănatoare cu termenul liber, ținând seama şi de rădăcinile ecuației caracteristice.

Însă este mai simplu să efectăm mai întâi schimbarea

$$y(x)=z(x)e^{\beta x}, \tag{2.4.129}$$

folosind formula (2.4.53) şi, după simplificarea cu $e^{\beta x}$, să determinăm o soluție particulară pentru ecuația în z, conform celor arătate la punctul precedent.

2.5. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR, INTEGRABILE PRIN CUADRATURI

1. Cea mai simplă ecuație de ordinul n integrabilă prin cuadraturi este

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2.5.1}$$

unde $f \in C^0(\mathrm{I}), \quad \mathrm{I} \subseteq \mathfrak{R}$.

Soluția generală se poate obține prin n cuadraturi şi este dată de formula

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt+C_0+C_1\frac{x-x_0}{1!}+\ldots+C_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{2.5.2}$$

$$x\in \mathrm{I},\ C_0, C_1,\ldots C_{n-1}\in\mathfrak{R}.$$

Într-adevăr, din ecuația $y^{(n)} = f(x)$ se obține

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t+C_{n-1}, \qquad x\in \mathrm{I}, \tag{2.5.3}$$

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t+C_{n-1}(x-x_0)+C_{n-2}, \qquad x\in \mathrm{I}. \tag{2.5.4}$$

Rezultă

$$y=\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x...\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t+C_0+C_1\frac{x-x_0}{1!}+...+C_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!},\qquad x\in \mathrm{I},\qquad (2.5.5)$$

unde integrala este luată de n ori. Egalitatea

$$\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}dx...\int_{x_0}^{x}f(t)dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t\,,\qquad (2.5.6)$$

numită *formula lui Cauchy*, se demonstrează prin inducție completă. Pentru n=2 avem

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\iint_{\Delta}f(t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\qquad (2.5.7)$$

unde Δ este triunghiul având vîrfurile (x_0,x_0), (x,x_0), (x,x). Schimbând ordinea de integrare, obținem

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}t\int_{t}^{x}f(t)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\int_{t}^{x}\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)\mathrm{d}t\,,\qquad (2.5.8)$$

Deci

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)\mathrm{d}t\,.\qquad (2.5.9)$$

Presupunând că egalitatea este adevărată pentru $n-1$, vrem să o demonstrăm pentru n. Avem

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x...\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-2}f(t)\mathrm{d}t,\qquad (2.5.10)$$

unde integrala este luată de $n-1$ori. Integrând încă o dată in raport cu x și folosind cazul $n=2$, obținem:

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \ldots \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-2} f(t)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.5.11}$$

În felul acesta, formula soluției generale a ecuației $y^{(n)} = f(x)$ este demonstrată. Dacă $f = 0$, atunci soluția generală a ecuației este un polinom arbitrar de gradul $n-1$

$$y = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{n-1} x^{n-1},\ x \in I,\ C_0, C_1, \ldots C_{n-1} \in \Re. \tag{2.5.12}$$

Exemplu

Determinarea săgeților *y* ale unei grinzi încărcate cu sarcina

$$p(x) = \frac{p_0 x}{l},$$

se realizează cu ajutorul ecuației diferențiale

$$y^{(4)} = \frac{1}{EI} p(x),$$

unde *l* reprezintă deschiderea grinzii, iar *EI* este rigiditatea la încovoiere.

Pentru a găsi o soluție particulară a ecuației (facând abstracție de constantele de integrare) putem face integrări directe sau să folosim formula lui Cauchy.

♣ Cu prima metodă obținem

$$y = \frac{p_0}{lEI}\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}x \int x\,\mathrm{d}x = \frac{p_0 x^5}{120 lEI}.$$

♣ Cu a doua metodă avem

$$\int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x p(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3 p(t)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^x \left(x^3 - 3tx^2 + 3t^2 x - t^3\right)\frac{p_0 t}{l}\mathrm{d}x = \frac{p_0 x^5}{120 l},$$

de unde deducem ***aceeaşi valoare*** pentru *y*,

$$\boxed{y=\frac{p_0x^5}{120lEI}}.$$

2. Alte ecuații de ordinul n integrabile prin cuadraturi sunt:

$$\begin{gathered}F\left(x,y^{(n)}\right)=0\,,\\ F\left(y^{(n-1)},y^{(n)}\right)=0\,,\\ F\left(y^{(n-2)},y^{(n)}\right)=0\,.\end{gathered} \tag{2.5.13}$$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei $F(u,v)=0$,

$$u=\varphi(t),\quad v=\psi(t),\quad \varphi,\psi\in C^1(\mathrm{I}),\quad \mathrm{I}\subset\Re, \tag{2.5.14}$$

atunci, în fiecare caz (2.5.13), soluția generală se obține prin n cuadraturi.

Pentru ecuația

$$F\left(x,y^{(n)}\right)=0\,,\qquad x\in \mathrm{I}\subset\Re\,, \tag{2.5.15}$$

avem

$$x=\varphi(t),\quad y^{(n)}=\psi(t),\quad \varphi,\psi\in C^1(\mathrm{I}),\quad \mathrm{I}\subset\Re\,. \tag{2.5.16}$$

Observăm că

$$\mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right)=\psi(t)\varphi(t)\mathrm{d}t, \tag{2.5.17}$$

de unde deducem

$$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi(t)\mathrm{d}t+C_0\,. \tag{2.5.18}$$

Repetând acelaşi procedeu obținem:

$$y=\Phi(t)+P_{n-1}(\varphi(t)),\quad t\in \mathrm{I}\,, \tag{2.5.19}$$

unde P_{n-1} este un polinom arbitrar de gradul $n-1$. Cum $x=\varphi(t)$, rezultă că am obținut soluția generală sub formă parametrică

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \Phi(t) + P_{n-1}(\varphi(t)), \quad t \in \mathrm{I}. \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Pentru ecuația

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0, \qquad x \in \mathrm{I} \subset \Re, \tag{2.5.21}$$

avem

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \quad \varphi, \psi \in C^1(I), \qquad \mathrm{I} \subset \Re. \tag{2.5.22}$$

Observăm că

$$\mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right) = \psi(t)\,\mathrm{d}\,x, \tag{2.5.23}$$

de unde deducem

$$\mathrm{d}\,x = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}\,t. \tag{2.5.24}$$

Prin integrare obținem:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}\,t + C_1. \tag{2.5.25}$$

În felul acesta, am redus problema la cea precedentă:

$$\begin{aligned} x &= \Phi(t), \\ y^{(n-1)} &= \varphi(t). \end{aligned} \tag{2.5.26}$$

Avem

$$\mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right) = \varphi(t)\,\mathrm{d}\,x = \varphi(t)\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}\,t, \tag{2.5.27}$$

deci

$$y^{(n-2)} = \int \varphi(t)\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}\,t + C_2. \tag{2.5.28}$$

Soluția generală se obține prin $n-2$ cuadraturi.

Pentru ecuația

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right)=0, \qquad x\in \mathrm{I}\subset \Re, \tag{2.5.29}$$

avem

$$y^{(n-2)}=\varphi(t), \quad y^{(n)}=\psi(t), \qquad \varphi, \psi\in C^1(\mathrm{I}), \quad \mathrm{I}\subset\Re. \tag{2.5.30}$$

Observăm că

$$\mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right)=\psi(t)\,\mathrm{d}\,x, \tag{2.5.31}$$

de unde deducem

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right)&=y^{(n)}\,\mathrm{d}\,x,\\ \mathrm{d}\left(y^{(n-2)}\right)&=y^{(n-1)}\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned} \tag{2.5.32}$$

Obținem:

$$\frac{\mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right)}{y^{(n)}}=\frac{\mathrm{d}\left(y^{(n-2)}\right)}{y^{(n-1)}}, \tag{2.5.33}$$

sau

$$y^{(n-1)}\,\mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right)=y^{(n)}\,\mathrm{d}\left(y^{(n-2)}\right)=\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t. \tag{2.5.34}$$

Rezultă

$$\left[y^{(n-1)}\right]^2=\int\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t+C. \tag{2.5.35}$$

În felul acesta, cunoscând $y^{(n-1)}$ şi $y^{(n-2)}$, ecuația s-a redus la tipul studiat anterior cu

$$\begin{aligned}y^{(n-1)}&=\left(\int\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t+C\right)^{1/2},\\ y^{(n-2)}&=\psi(t).\end{aligned} \tag{2.5.36}$$

3. Multor ecuații diferențiale de ordin superior li se poate micşora ordinul. De exemplu, este cazul ecuațiilor diferențiale de forma

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}\right)=0,$$
$$F\left(y, y',..., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0. \tag{2.5.37}$$

Pentru ecuația

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}\right)=0, \tag{2.5.38}$$

prin schimbarea de funcție

$$y^{(k)}=u, \tag{2.5.39}$$

obținem o ecuație de ordinul $n-k$:

$$F\left(x, u, u',..., u^{(n-k)}\right)=0. \tag{2.5.40}$$

Dacă reuşim să integrăm această ecuație, rezultă

$$u=\varphi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k}) \tag{2.5.41}$$

şi

$$y^{(k)}=\varphi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k}). \tag{2.5.42}$$

Această ecuație este de tipul studiat la începutul paragrafului.

Pentru ecuația

$$F\left(y, y',..., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0, \tag{2.5.43}$$

prin transformarea

$$y'=p,$$

şi luând pe y ca variabilă independentă, obținem o ecuație diferențială având ordinul redus cu o unitate. Într-adevăr, dacă

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p,$$

atunci

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, \tag{2.5.44}$$

Analog,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = p\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)^2 + p^2\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}y^2}. \qquad (2.5.45)$$

Observăm că derivatele $\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$ se scriu cu ajutorul lui p şi a derivatelor $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},...,\frac{\mathrm{d}^{k-1} p}{\mathrm{d}y^{k-1}}$. Obținem o ecuație diferențială de ordinul n-1, unde p este funcția necunoscută, iar y este variabila independentă.

4. Reducerea ordinului se poate realiza și pentru ecuația diferențială de ordinul n

$$F\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (2.5.46)$$

omogenă în $y, y',..., y^{(n-1)}, y^{(n)}$. Prin transformarea

$$\frac{y'}{y} = u,$$

ecuației i se reduce ordinul cu o unitate. Într-adevăr, ecuația se scrie

$$F\left(x, \frac{y'}{y},..., \frac{y^{(n-1)}}{y}, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0. \qquad (2.5.47)$$

Făcând substituția $y' = yu$, obținem succesiv

$$\begin{aligned} y'' &= y'u + yu' = y\left(u^2 + u'\right), \\ y''' &= y'\left(u^2 + u'\right) + y\left(2uu' + u''\right) = y\left(u^3 + 3uu' + u''\right). \end{aligned} \qquad (2.5.48)$$

Se observă că $y^{(k)}$ se exprimă cu ajutorul lui y înmulțit cu o expresie care conține derivatele $u, u',..., u^{(k-1)}$. Rezultă că ecuației inițiale i se poate reduce ordinul cu o unitate.

Exemplu

Pentru a rezolva ecuația diferențială de ordinul al doilea

$$xyy''+xy'^2-yy'=0,$$

omogenă în y, y', y'', observăm mai întâi că $y=0$ este soluție. Pentru a determina soluțiile nenule, facem transformarea $\frac{y'}{y}=u$. Obținem

$$xy^2u'+xy^2u^2+xy^2u^2-uy^2=0,$$

sau

$$u'-\frac{u}{x}+2u^2=0,$$

adică o ecuație de ordinul întâi (ecuație de tip Bernoulli; a se vedea §1.3.7).

5. O altă ecuație diferențială importantă, căreia i se poate reduce ordinul este de forma

$$F\left(y, xy', \ldots, x^{n-1}y^{(n-1)}, x^n y^{(n)}\right)=0. \tag{2.5.49}$$

Ecuațiile lineare de forma (2.5.49) se numesc *ecuații de tip Euler*.

Prin schimbarea de variabilă $x=\mathrm{e}^t, \quad x>0,$ obținem

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\\
&\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),\\
&\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right).
\end{aligned} \tag{2.5.50}$$

deci

$$\begin{aligned} &x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\\ &x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\\ &x^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{2.5.51}$$

Prin urmare $x^k\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}$ se exprimă numai cu $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\dots,\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}t^k}$, iar ecuația se transformă în

$$F\left(y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\dots\right)=0, \tag{2.5.52}$$

Luând $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=p$ şi y ca variabilă independentă, obținem o ecuație având ordinul redus cu o unitate.

Exemplu

Pentru a studia înconvoierea unei plăci subțiri, circulare de rază R, încastrate pe contur şi supusă unei sarcini concentrate în centrul ei, se utilizează ecuația diferențială

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=kx,\quad x\in(0,R],$$

unde k este o constantă.

Modelul matematic este reprezentat de o ecuație diferențială ordinară lineară şi neomogenă, de ordinul II. Este chiar o ecuație de tip Euler. Pentru a rezolva ecuația omogenă asociată facem schimbarea de variabilă $x=\mathrm{e}^t$, procedând la fel ca mai sus; de altfel, acesta este şi modul de rezolvare al ecuației Euler (vezi paragraful 2.6).

Obținem

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y=0,$$

care are soluția $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x,$ unde C_1, C_2 sunt constante reale.

Altă metodă de rezolvare a ecuației omogene este utilizarea substituției $u = \frac{y}{x}$, care permite reducerea ordinului cu o unitate. Obținem $xu''+3u'=0.$ Notând $u'=p$, obținem ecuația diferențială de ordinal întâi cu variabile separabile $xp'+3p=0$. Rezultă

$$p = \frac{D_1}{x^3}, \quad u = \frac{C_1}{x^2} + C_2, \quad y = \frac{C_1}{x} + C_2 x,$$

unde D_1, $C_1 = -\frac{K_1}{2}$ şi C_2 sunt constante reale.

Soluția generală a ecuației neomogene se află utilizând metoda variației constantelor şi este

$$y = \left(-\frac{k}{4}x^2 + C_1\right)\frac{1}{x} + \left(\frac{k}{2}\ln x + C_2\right)x\,. \tag{2.5.53}$$

2.6. ECUAȚII REDUCTIBILE LA EDO CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Dacă, prin intermediul unei schimbări de variabilă sau funcție, reuşim să transformăm o ecuație diferențială ordinară într-una lineară şi cu coeficienți constanți, atunci, prin transformarea inversă, putem exprima soluția ecuației date pornind de la cea a ecuației transformate, pe care ştim să o rezolvăm. Vom da câteva exemple edificatoare.

1. Fie ecuația

$$Ly \equiv \left(1 - x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + n^2 y = 0\,. \tag{2.6.1}$$

Să efectuăm ***schimbarea de variabilă***

$$x = \cos t\,. \tag{2.6.2}$$

Reconstituim ecuația:

$$\begin{array}{l|l|l}
\times n^2 & y = y & \times n^2 \\
\times(-x) & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & \times(-\cos t) \\
\times\left(1-x^2\right) & \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = -\dfrac{\cos t}{\sin^3 t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\sin^2 t}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} & \times\sin^2 t \\
\hline
\end{array}$$

$$Ly = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\cos t}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\cos t}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + n^2 y = 0,$$

şi rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + n^2 y = 0\,. \tag{2.6.3}$$

Aceasta este o ecuație diferențial ordinară lineară şi omogenă, cu coeficienți constanți. Conform celor arătate anterior (vezi şi aplicația despre oscilatorul armonic de la paragraful 2.4), un sistem fundamental de soluții este

$$y_1 = \cos nt, \quad y_2 = \sin nt\,, \tag{2.6.4}$$

sau, revenind la variabila *x*,

$$y_1 = \cos n(\arccos x), \quad y_2 = \sin n(\arccos x). \tag{2.6.5}$$

Dacă $n = 1$, atunci $y_1 = \cos(\arccos x) = x$. Pornind de la această observație, se demonstrează că pentru *n* impar, y_1 este polinom de gradul *n* în *x*.

Aceste polinoame sunt ***polinoamele Cebîşev***.

2. Fie ***ecuația Bessel***, mult folosită în aplicații inginereşti:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0\,. \tag{2.6.6}$$

Este o ecuație lineară, de ordinul II, cu coeficienți variabili. Soluția sa se caută sub formă de serie şi are drept rezultat introducerea ***funcțiilor Bessel***, care depind de indicele ν. Să scriem ecuația Bessel pentru $\nu = \frac{1}{2}$:

$$Ly \equiv x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0\,. \tag{2.6.7}$$

Aplicăm acestei ecuații ***schimbarea de funcție***

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}}\,. \tag{2.6.8}$$

Reconstituim ecuația (2.6.7):

$$\begin{array}{l|l}
y = x^{-\frac{1}{2}} z & \times\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \\
y' = x^{-\frac{1}{2}} z' - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} z & \times x \\
y'' = x^{-\frac{1}{2}} z'' - 2\cdot\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} z' + \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} z & \times x^2
\end{array}$$

$$Ly = x^{\frac{3}{2}} z'' + \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) z' + \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}}\right) z = 0,$$

de unde deducem pentru z ecuația diferențială lineară şi omogenă, cu coeficienți constanți,

$$z'' + z = 0\,. \tag{2.6.9}$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x\,; \tag{2.6.10}$$

revenind la y prin (2.6.8), obținem

$$y = \frac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{\sqrt{x}}, \tag{2.6.11}$$

care este ***soluția generală a ecuației Bessel pentru indicele*** $\nu = \frac{1}{2}$.

3. ***ECUAȚIA EULER***. Fie ecuația diferențială ordinară lineară, de ordinul *n*, cu coeficienți variabili:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0. \tag{2.6.12}$$

Aceasta este ***ecuația Euler***; observăm că derivatele de ordinul *k* ale lui *y* sunt înmulțite cu puteri de același ordin ale lui *x*. Îi vom aplica schimbarea de variabilă

$$x = \mathrm{e}^t. \tag{2.6.13}$$

Pentru o mai bună înțelegere, vom face acest calcul pentru cazul $n = 3$; cazul *n* arbitrar se tratează absolut analog.

Fie deci EDO

$$a_0 x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = 0. \tag{2.6.14}$$

Avem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-t} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \to \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}. \tag{2.6.15}$$

Reconstituim ecuația, notând cu *E* operatorul identitate ($Ey = y$):

$$\begin{array}{l|l|l}
\times a_3 & y = y & a_3 \\
\times a_2 x & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-t} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & a_2 \mathrm{e}^t \\
\times a_1 x^2 & \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{e}^{-t} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{e}^{-2t} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - E\right) y & a_1 \mathrm{e}^{2t} \\
\times a_3 x^3 & \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \mathrm{e}^{-t} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\right)\right] = \mathrm{e}^{-3t} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - E\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2E\right) y & a_0 \mathrm{e}^{3t} \\
\hline
\end{array}$$

$$Ly = a_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - E\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2E\right) y + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - E\right) y + a_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y + a_3 y = 0.$$

Rezultă EDO lineară, cu coeficienți constanți

$$Ly = a_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - E\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2E\right)y + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - E\right)y + a_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y + a_3 y = 0\,. \tag{2.6.16}$$

După cum am arătat în paragraful 2.4, căutăm soluții de forma

$$y = \mathrm{e}^{rt}\,. \tag{2.6.17}$$

Ecuația caracteristică asociată este

$$a_0 r(r-1)(r-2) + a_1 r(r-1) + a_2 r + a_3 = 0\,. \tag{2.6.18}$$

După ce o rezolvăm, găsim un sistem fundamental de soluții şi scriem soluția generală a EDO (2.6.16).

Observație. Combinând schimbarea de variabilă cu forma exponențială (2.6.17), constatăm că

$$y = \mathrm{e}^{rt} = \mathrm{e}^{r\ln x} = \mathrm{e}^{\ln x^r} = x^r\,. \tag{2.6.19}$$

Deci în aplicații este mai simplu să căutăm direct soluții de forma

$$y = x^r\,. \tag{2.6.20}$$

Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației

$$x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0\,. \tag{2.6.21}$$

Soluție. Este o ecuație de tip Euler şi deci căutăm direct soluții de forma (2.6.20). Avem

$$\begin{array}{l|l} \times 5 & y = x^r \\ \times 3x & y' = rx^{r-1} \\ \times x^2 & y'' = r(r-1)x^{r-2} \\ \hline \end{array} \tag{2.6.22}$$

$$Ly = [r(r-1) + 3r + 5]x^r = 0,$$

deci ecuația caracteristică este

$$r^2 + 2r + 5 = 0, \qquad (2.6.23)$$

şi are rădăcinile $r_{1,2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$. Soluțiile corespunzătoare vor fi

$$y_1 = x^{-1+2\mathrm{i}}, \quad y_2 = x^{-1-2\mathrm{i}}. \qquad (2.6.24)$$

Pentru a rămâne în cadrul real, folosim formulele lui Euler. Putem scrie

$$y_1 = x^{-1+2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\ln x}}{x}, \quad y_2 = \overline{y_1} = x^{-1-2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\ln x}}{x}, \qquad (2.6.25)$$

astfel încât, luând partea reală şi imaginară a lui y_1, obținem sistemul fundamental real

$$Y_1 = \frac{\cos(2\ln x)}{x}, \quad Y_2 = \frac{\sin(2\ln x)}{x}; \qquad (2.6.26)$$

soluția generală a ecuației Euler (2.6.21) este

$$y(x) = \frac{c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)}{x}. \qquad (2.6.27)$$

2.7. APLICAȚII ÎN MECANICĂ, FIZICĂ ŞI INGINERIE

Aplicația 2.7.1. Oscilații liniare (D. Comănescu, I. Caşu)

Problema fizică. Considerăm un corp material supus unei forțe de tip elastic $\vec{F}_e$. Vom privi corpul ca un punct material cu masa constantă *m.* Pe baza cunoscutei legi a lui Hooke forța elastică este direct proporțională cu vectorul de mişcare $\vec{x}$. Modelul matematic al mişcărilor provine din legea a II-a a lui Newton.

În aplicațiile practice intervin şi alte forțe asupra punctului material. Atunci când acesta se mişcă printr-un mediu rezistent semnificativă este şi forța de frecare, pe care noi o vom considera direct proporțională cu viteza punctului material, mai exact $\vec{F}_f = -\mu \cdot \vec{v}$. Constanta de frecare μ este strict pozitivă din considerente fizice. Dacă

punctul material se află în vecinătatea suprafeței Pământului atunci trebuie să ținem seama şi de greutatea punctului material. O situație foarte generală este aceea în care punctul material se află şi într-un câmp exterior variabil $\vec{F}(t)$.

În cele ce urmează studiem mai multe situații în care forța rezultantă cuprinde întotdeauna forța elastică.

În această aplicație ne vom ocupa cu studiul mişcărilor rectilinii ale punctului material. Notăm cu x componenta mişcării pe dreapta aleasă.

1. Oscilații libere

În această secțiune considerăm că forța elastică este singura forță ce acționează asupra punctului material. ***Modelul matematic*** al mişcărilor liniare este:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x,$$

unde k este o constantă strict pozitivă numită *constanta elastică.* Ecuația diferențială poate fi scrisă sub forma

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0, \tag{2.7.1}$$

care este *o ecuație diferențială de ordinul* 2, *liniară şi omogenă* (vezi §2.4). Ecuația caracteristică asociată este

$$m \cdot \lambda^2 + k = 0.$$

Rădăcinile acesteia sunt $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$. În fizică expresia $\sqrt{\frac{k}{m}}$ se notează cu ω şi este numită *frecvența unghiulară a oscilației* sau pe scurt *frecvență.* Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$x(t) = c_1 \cos(\omega \cdot t) + c_2 \sin(\omega \cdot t)$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante reale arbitrare. Aceste constante pot fi unic determinate cunoscând poziția inițială x_0 şi viteza inițială v_0. Mişcarea determinată de aceste condiții inițiale este soluția unică a următoarei probleme Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} . \qquad (2.7.2)$$

Această soluție are expresia

$$x(t) = x_0 \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

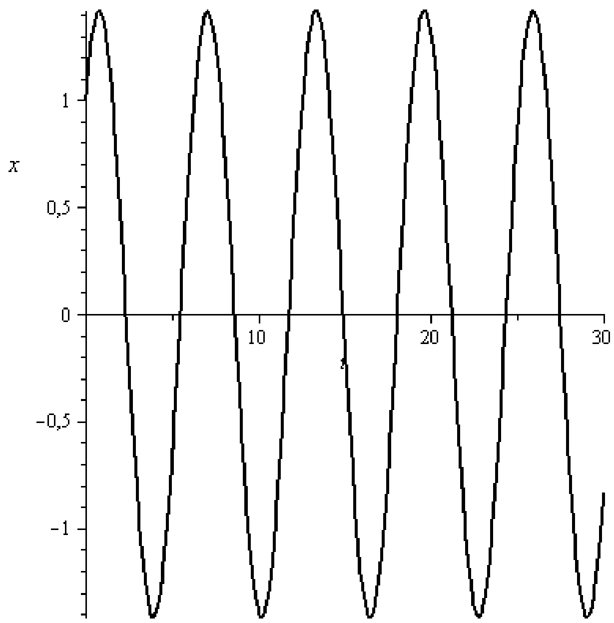


Figura 2.7.1. Oscilații libere

Analizând expresia mişcării punctului material se observă urmatoarele proprietăți:

- mişcarea este mărginită iar maximul funcției de mişcare se numeşte *amplitudinea oscilației* şi are valoarea $\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$;

➢ mişcarea este periodică de perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

În Figura 2.7.1. este prezentată o simulare numerică, făcută cu programul MAPLE 11, a mişcării punctului material.

2. Oscilații amortizate

Punctul material este acționat de forța elastică şi o forță de frecare cu un mediu rezistent. ***Modelul matematic*** al mişcărilor liniare este:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x - \mu \cdot \dot{x}.$$

Ecuația diferențială poate fi scrisă sub forma

$$m \cdot \ddot{x} + \mu \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0, \qquad (2.7.3)$$

care este o *ecuație diferențială de ordinul* 2, *liniară şi omogenă*. Ecuația caracteristică asociată este

$$m \cdot \lambda^2 + \mu \cdot \lambda + k = 0$$

şi are rădăcinile

$$\lambda_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m}, \quad \lambda_2 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m}.$$

Deosebim trei cazuri:

(i) $\mu^2 - 4 \cdot m \cdot k > 0$. În acest caz λ_1 şi λ_2 sunt valori reale strict negative. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$x(t) = c_1 \exp(\lambda_1 \cdot t) + c_2 \exp(\lambda_2 \cdot t).$$

Observăm că toate soluțiile tind spre 0 când $t \to \infty$. Figura 2.7.2 prezintă o simulare a mişcării.

(ii) $\mu^2 - 4 \cdot m \cdot k = 0$. În acest caz soluția generală a ecuației diferențiale este

$$x(t) = (c_1 + c_2 \cdot t) \cdot \exp(-\frac{\mu \cdot t}{2 \cdot m}).$$

Și în acest caz toate soluțiile tind spre 0 când $t \to \infty$.

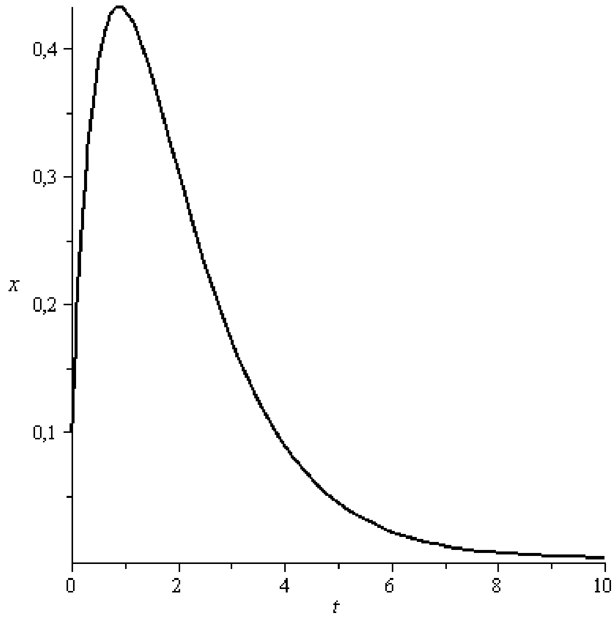


Figura 2.7.2. Oscilații amortizate. Cazul $\mu^2 - 4 \cdot m \cdot k > 0$

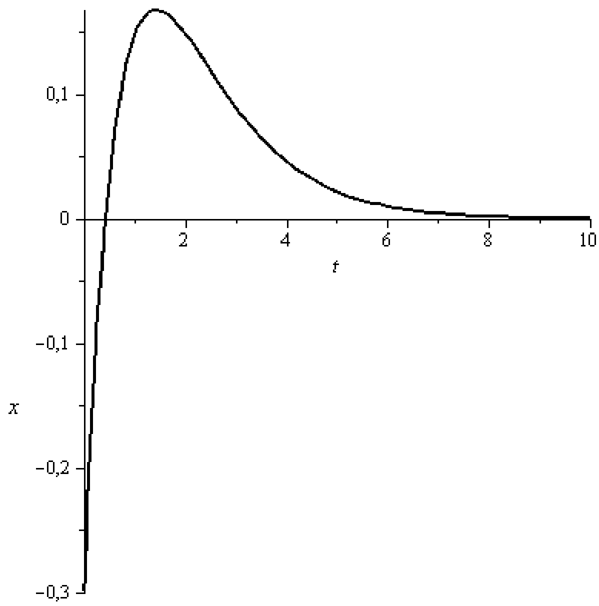


Figura 2. 7.3. Oscilații amortizate. Cazul $\mu^2 - 4 \cdot m \cdot k = 0$

(iii) $\mu^2 - 4 \cdot m \cdot k < 0$. În acest caz λ_1 şi λ_2 sunt complex conjugate. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$x(t) = \exp(-\frac{\mu \cdot t}{2 \cdot m}) \cdot (c_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t))$$

unde am notat prin. $\omega_1 = \frac{\sqrt{-\mu^2 + 4 \cdot m \cdot k}}{2 \cdot m}$ .Toate soluțiile tind spre 0 când $t \to \infty$.

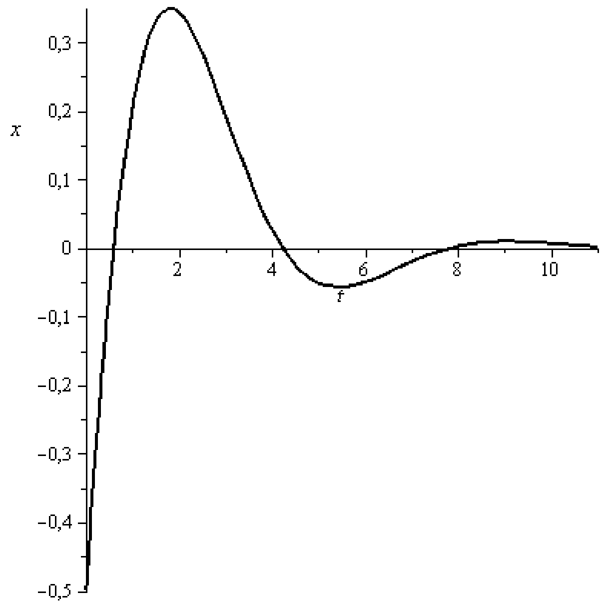


Figura 2.7. 4. Oscilații amortizate. Cazul $\mu^2 - 4 \cdot m \cdot k < 0$

3. Oscilații forțate neamortizate

În situația de față, asupra punctului material acționează forța elastică şi un câmp exterior variabil $\vec{F}(t)$. Presupunem că acest câmp este dirijat de-a lungul dreptei pe care se mişcă punctul material şi notăm cu $F(t)$ componenta corespunzătoare. ***Modelul matematic*** al mişcărilor liniare este:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x + F(t).$$

Ecuația diferențială poate fi scrisă sub forma

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = F(t), \tag{2.7.4}$$

care este o ecuație diferențială de ordinul 2, liniară şi neomogenă. Vom studia această ecuație în câteva situații importante din punct de vedere practic. Vom presupune că la momentul inițial punctul material este în repaus şi în echilibru ceea ce din punct de vedere matematic înseamnă $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$.

3.1. $F(t) = m \cdot g$ **constant**

Această situație corespunde cazului în care punctul material se află sub influența forței elastice şi a greutății provocate de Pământ. Constanta g este *accelerația gravitațională*. Problema Cauchy a mişcării este

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = mg \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}, \tag{2.7.5}$$

unde am utilizat notația făcută în paragraful referitor la oscilații libere. Soluția acestei probleme este

$$x(t) = \frac{g}{\omega^2} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)). \tag{2.7.6}$$

Remarcăm că punctul material execută o mişcare mărginită şi periodică, de perioadă $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

3.2. $F(t) = a \cdot t$ **cu** ***a*** **constantă**

Această situație poate fi întâlnită atunci când aproximăm câmpul exterior de forță prin partea sa liniară. Problema Cauchy a mişcării este

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \dfrac{a}{m} \cdot t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} . \qquad (2.7.7)$$

Soluția acestei probleme este

$$x(t) = \frac{a}{m \cdot \omega^3} \cdot (\omega \cdot t - \sin(\omega \cdot t)) . \qquad (2.7.8)$$

Se observă că oscilația este nemărginită.

3.3. $F(t) = a \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$**, cu** a **şi** α **constante**

Mişcării îi corespunde problema Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \dfrac{a}{m} \cdot \exp(-\alpha \cdot t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} . \qquad (2.7.9)$$

Este o ecuație diferențială ordinară de ordinul II, cu coeficienți constanți, lineară şi omogenă. Soluția acestei probleme este

$$x(t) = \frac{a}{m \cdot (\omega^2 + \alpha^2)} \cdot (\exp(-\alpha \cdot t) - \cos(\omega \cdot t) + \frac{\alpha}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t)) . \qquad (2.7.10)$$

3.4. Cazul de rezonanță $F(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$**, cu** a **constantă**

În acest caz frecvența câmpului exterior $F(t)$ coincide cu frecvența unghiulară a oscilației (a se vedea secțiunea de oscilații libere). Mişcarea este modelată de problema Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \dfrac{a}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} . \qquad (2.7.11)$$

Ecuația diferențială este de ordinul II, lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți. Soluția acestei probleme este

$$x(t) = \frac{a}{2 \cdot m \cdot \omega} \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t). \tag{2.7.12}$$

În figura 2.7.5 este prezentată o simulare numerică a mişcării punctului material din care se observă că amplitudinea oscilației creşte, mişcarea fiind nemărginită. Acest fenomen este responsabil pentru numeroase catastrofe tehnice.

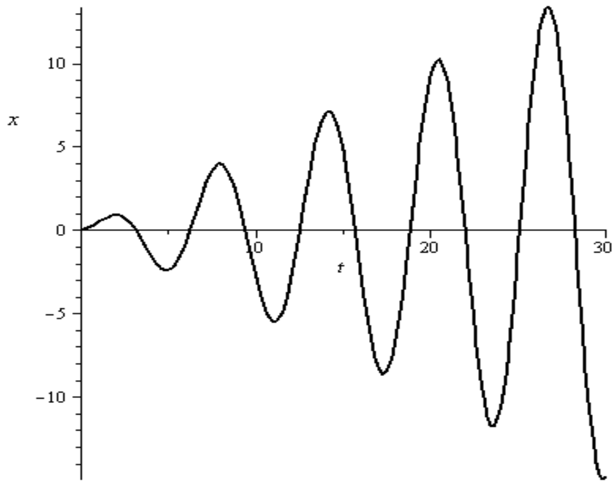


Figura 2.7. 5. Oscilații forțate, neamortizate cu rezonanță

3.5.Cazul de non-rezonanță $F(t) = a \cdot \cos(\sigma \cdot t)$, cu a, σ constante şi $\sigma \neq \omega$

În acest caz frecvența $\sigma > 0$ câmpului exterior $F(t)$ nu coincide cu frecvența unghiulară a oscilației ω. Modelul mişcării este reprezentat de problema Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \dfrac{a}{m} \cdot \cos(\sigma \cdot t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}, \tag{2.7.13}$$

asemănător cazurilor precedente.

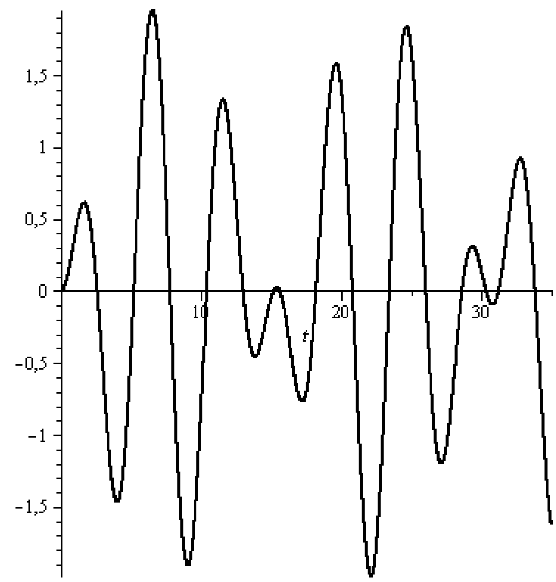


Figura 2.7.6. Oscilații forțate, neamortizate, cazul de non-rezonanță

Soluția acestei probleme este

$$x(t) = \frac{a}{m \cdot (\omega^2 - \sigma^2)} \cdot (-\cos(\omega \cdot t) + \cos(\sigma \cdot t)). \qquad (2.7.14)$$

Observăm că mişcarea punctului material este mărginită şi este suma a două funcții periodice de perioade diferite. În figura 2.7.6 este prezentată o simulare numerică a mişcării punctului material.

Aplicația 2.7.2. Mişcarea pendulului simplu (G. Cosovici, S. Comşa)

Pendulul simplu este un punct material cu masa *m* suspendat de o articulație fixă *O* prin intermediul unui fir inextensibil şi fără greutate având lungimea *l* (figura 2.7.7). La momentul $t = 0,$ pendulul se află într-o configurație de repaus, în care firul formează cu verticala unghiul $\theta_0 > 0.$ Din această poziție, el este lăsat să se mişte liber. În afară de greutatea proprie, asupra punctului material acționează tensiunea din fir (vom neglija frânarea exercitată de aerul atmosferic). Aceste forțe definesc planul traiectoriei parcurse de pendul.

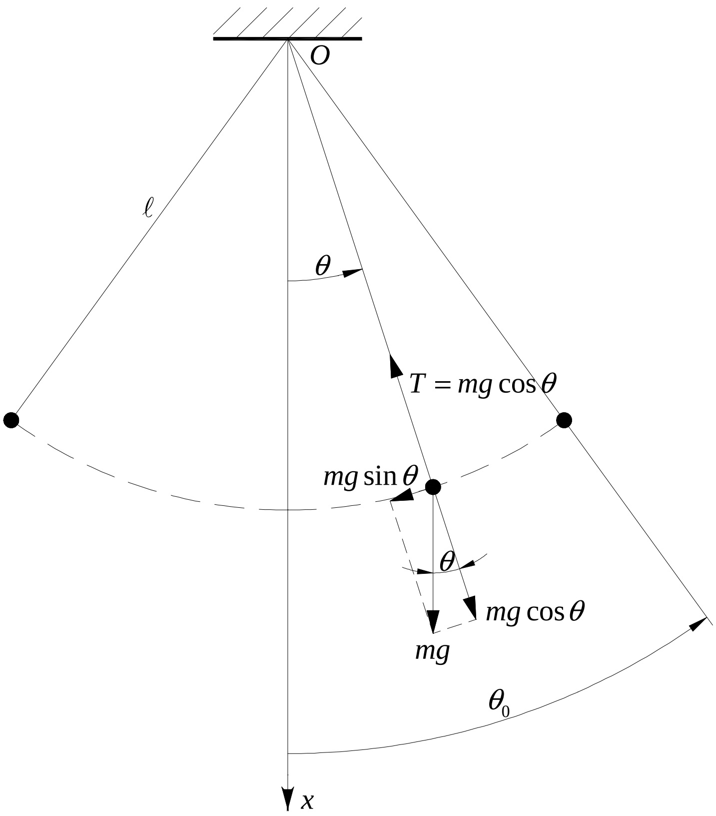


Figura 2.7.7. Modelul mecanic al unui pendul simplu

Model matematic. Dacă se utilizează un sistem de coordonate polare centrat în articulația *O* (figura 2.7.7), mişcarea punctului material poate fi descrisă cu ajutorul funcției

$$\theta = \theta(t), \quad t \geq 0, \tag{2.7.15}$$

care defineşte unghiul curent format de fir cu verticala (pe tot parcursul discuției care urmează, vom considera că unghiul θ este măsurat în radiani). În raport cu acest reper, singurele deplasări ale pendulului au loc pe direcție circumferențială, direcție în lungul căreia acționează o componentă a greutății neechilibrată de tensiunea din fir. Observația de mai sus ne permite să scriem următoarea expresie a celui de al doilea principiu al dinamicii (figura 2.7.7):

$$m\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0. \tag{2.7.16}$$

În egalitatea (2.7.16), *g* este accelerația gravitațională. După simplificarea cu *m*, (2.7.16) devine

$$\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0. \tag{2.7.17}$$

Datorită neliniarității, ecuația diferențială (2.7.17) nu poate fi rezolvată analitic. Totuşi, pentru unghiuri θ mici (maximum 0,087266 rad = 5°), dezvoltarea în serie

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots \tag{2.7.18}$$

ne permite să operăm cu aproximarea

$$\sin\theta \approx \theta. \tag{2.7.19}$$

Cu ajutorul acesteia, ecuația diferențială (2.7.17) se rescrie sub forma liniarizată

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0. \tag{2.7.20}$$

Soluție. Ecuația (2.7.20) este o ecuație diferențială lineară şi omogenă, de ordinul II, cu coeficienți constanți. Soluția sa generală are expresia (vezi §2.4)

$$\theta(t) = A\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{\ell}} + \varphi_0\right), \quad t \geq 0, \tag{2.7.21}$$

în care $A > 0$ şi φ_0 sunt constante. Valorile lor se determină impunând condițiile inițiale

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \tag{2.7.22}$$

Particularizarea funcției $\theta = \theta(t)$, definită sub forma (2.7.21) pentru cele două constrângeri de mai sus, conduce la sistemul de ecuații

$$A\cos\varphi_0 = \theta_0, \quad -\sqrt{g/\ell}A\sin\varphi_0 = 0. \tag{2.7.23}$$

Prin rezolvarea acestuia se obține

$$A = \theta_0, \quad \varphi_0 = 0. \tag{2.7.24}$$

După înlocuirea expresiilor (2.7.24) ale constantelor A şi φ_0, formula (2.7.21) devine

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(t\sqrt{g/\ell}\right), \quad t \geq 0. \tag{2.7.25}$$

Interpretare fizică. Se observă că soluția (2.7.25) descrie o evoluție periodică a unghiului $\theta = \theta(t)$. Valorile extreme pe care le ia funcția $\theta = \theta(t)$ sunt $\pm\theta_0$. Timpul care separă două treceri succesive printr-un maximum (sau minimum) se numeşte perioadă şi este calculabil cu formula

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}. \tag{2.7.26}$$

După cum se poate remarca, T este o constantă. Oscilațiile pendulului sunt aşadar izocrone. Această concluzie este totuşi valabilă numai în ipoteza oscilațiilor de amplitudine foarte mică.

Aplicația 2.7.3. Mişcarea pendulului simplu în prezența frânării exercitate de aerul atmosferic (G. Cosovici, S. Comşa)

Vom relua exemplul precedent, ținând cont şi de rezistența aerului atmosferic. Admitem că frânarea este proporțională cu viteza punctului material. De asemenea, adoptăm ipoteza micilor oscilații.

Model matematic. În atare condiții, principiul al doilea al dinamicii se scrie sub forma

$$m\ell\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mg\theta = 0, \tag{2.7.27}$$

unde $b > 0$ este rezistența aerului (presupusă constantă). Pentru comoditatea calculelor, este convenabilă definirea *coeficientului de frânare*

$$\gamma = \frac{b}{2m\ell}. \tag{2.7.28}$$

Cu ajutorul acestei mărimi, ecuația diferențială (2.7.27) devine

$$\ddot{\theta}+2\gamma\dot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0. \tag{2.7.29}$$

Soluție. Ecuația de ordinul II (2.7.29) este lineară şi omogenă, cu coeficienți constanți. Soluția sa generală are expresia (vezi §2.4)

$$\theta(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t},\quad t\geq 0, \tag{2.7.30}$$

unde A_1 şi A_2 rezultă din condițiile (2.7.22), iar λ_1 şi λ_2 sunt soluții ale ecuației caracteristice

$$\lambda^2+2\gamma\lambda+g/\ell=0, \tag{2.7.31}$$

deci

$$\lambda_1=-\gamma-\sqrt{\gamma^2-g/\ell},\quad \lambda_2=-\gamma+\sqrt{\gamma^2-g/\ell}. \tag{2.7.32}$$

Pendulul va efectua o mişcare periodică numai atunci când

$$\gamma<\sqrt{g/\ell}. \tag{2.7.33}$$

Pentru acest caz, soluțiile (2.7.32) se pot rescrie sub forma

$$\lambda_1=-\gamma-i\,\omega,\quad \lambda_2=-\gamma+i\,\omega, \tag{2.7.34}$$

unde

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}-\gamma^2}. \tag{2.7.35}$$

Soluția generală devine atunci

$$\theta(t)=e^{-\gamma t}\left(A_1e^{-i\omega t}+A_2e^{i\omega t}\right),\quad t\geq 0. \tag{2.7.36}$$

Întrucât putem găsi oricând două constante A şi φ_0 care să garanteze satisfacerea egalităților

$$A_1=\frac{A}{2}e^{-i\varphi_0},\quad A_2=\frac{A}{2}e^{i\varphi_0}, \tag{2.7.37}$$

relația (2.7.36) admite rescrierea sub forma echivalentă

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0), \quad t \geq 0. \tag{2.7.38}$$

Aplicând constrângerile (2.7.22) soluției generale (2.7.38), deducem sistemul de ecuații

$$A\cos\varphi_0 = \theta_0, \quad -\gamma A\cos\varphi_0 - \omega A\sin\varphi_0 = 0. \tag{2.7.39}$$

Prin rezolvarea acestuia obținem

$$A = \theta_0 \Big/ \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\omega}\right), \quad \varphi_0 = -\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\omega}\cdot \tag{2.7.40}$$

După înlocuirea expresiilor (2.7.40) ale constantelor A şi φ_0, formula (2.7.38) devine

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\omega}\right) \Big/ \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\omega}\right), \quad t \geq 0, \tag{2.7.41}$$

sau, dacă aplicăm proprietățile funcțiilor trigonometrice,

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right), \quad t \geq 0. \tag{2.7.42}$$

Interpretare fizică. Soluția (2.7.42) ne arată că amplitudinea oscilațiilor scade exponențial în timp. Perioada mişcării este intervalul de timp care separă două treceri succesive printr-un extrem de acelaşi tip şi se determină impunând condiția $\dot{\theta}(t) = 0.$ Cu ajutorul lui (2.7.42), această condiție se explicitează sub forma $\sin\omega t = 0.$ Rezultă astfel expresia perioadei oscilațiilor amortizate (vezi şi § 2.4)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{\ell} - \gamma^2}}\cdot \tag{2.7.43}$$

Observăm că formula de mai sus se reduce la cazul (2.7.25) pentru $\gamma = 0$. Este interesant de sesizat că, în ciuda amplitudinii descrescătoare, micile oscilații continuă să fie izocrone.

Aplicația 2.7.4. Configurația de echilibru a unui fir perfect flexibil solicitat concomitent de greutatea proprie şi de o pretensionare orizontală (G. Cosovici, S. Comşa)

Problema fizică. Considerăm cazul unui fir solicitat de propria greutate şi de forța orizontală $H = 1000\,\mathrm{N}$ (figura 2.7.8). Firul are următoarele caracteristici: lungimea $\ell = 60$ m, aria secțiunii transversale $A = 10^{-5}$ m^2, respectiv greutatea unității de lungime $q = 0{,}8$ N/m.

Pentru a ne face o imagine asupra dimensiunilor secțiunii transversale, admitem că aceasta ar fi circulară de diametru *d*. Folosind datele de mai sus, obținem prin calcul

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-5}}{\pi}} \approx 3{,}6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}, \tag{2.7.44}$$

deci un raport lungime – diametru

$$\frac{\ell}{d} \approx \frac{60}{3{,}6 \cdot 10^{-3}} = 16{,}67 \cdot 10^{3}. \tag{2.7.45}$$

Această din urmă valoare evidențiază faptul că firul este foarte subțire. În asemenea circumstanțe, poate fi adoptată ipoteza flexibilității perfecte, admițând că firul este capabil să preia doar solicitări de întindere, fără să posede rezistență la încovoiere sau forfecare.

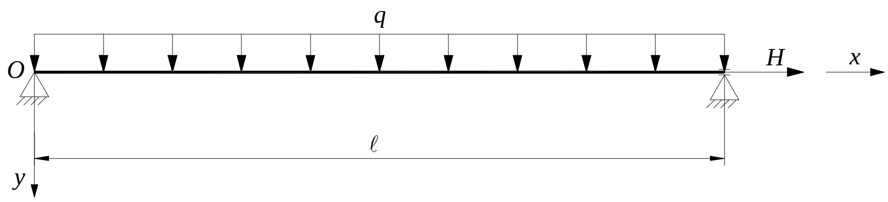


Figura 2.7.8. Fir solicitat concomitent de greutatea proprie şi de o pretensionare orizontală

O a doua ipoteză a modelului pe care îl vom prezenta mai jos poate fi justificată evaluând raportul dintre forța de pretensionare şi greutatea întregului fir:

$$\frac{H}{q\ell} = \frac{1000}{0,8 \cdot 60} \approx 20,83. \tag{2.7.46}$$

Valoarea obținută ne determină să admitem că variațiile tensiunilor din fir cauzate de greutatea proprie sunt neglijabile în comparație cu efectul pretensionării prin forța H. Coroborând această simplificare cu ipoteza flexibilității perfecte, concluzionăm că eforturile de tracțiune T au aproximativ aceeaşi componentă orizontală H pe toată lungimea ℓ (figura 2.7.9).

Model matematic. Pentru a descrie deformarea firului vom utiliza un sistem de coordonate carteziene a cărui origine O este amplasată la capătul din stânga al firului, axele x şi y fiind orientate aşa cum se vede în figura 2.7.8. Valoarea foarte redusă a greutății proprii în comparație cu forța de pretensionare ne determină să adoptăm ipoteza deformațiilor mici, admițând că secțiunile transversale ale firului se deplasează numai pe axa y şi distorsiunile lor sunt neglijabile. În aceste condiții, deplasările verticale ale particulelor aflate inițial pe axa Ox pot fi considerate reprezentative pentru toate celelalte particule din secțiunile transversale corespondente. Altfel spus, săgeata verticală f este funcție numai de coordonata x:

$$f = f(x), \quad x \in [0, \ell]. \tag{2.7.47}$$

Determinarea configurației de echilibru a firului se reduce la a găsi funcția $f = f(x)$. Problema se rezolvă impunând condiția ca suma componentelor verticale ale forțelor care acționează asupra unui element liniar de fir să fie zero (figura 3):

$$q\,\mathrm{d}x + H\,\mathrm{tg}(\alpha + \mathrm{d}\alpha) - H\,\mathrm{tg}\alpha = 0. \tag{2.7.48}$$

Trebuie observat faptul că tangenta unghiului α este derivata lui f în raport cu variabila x

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f', \quad \operatorname{tg}(\alpha + \mathrm{d}\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f + \mathrm{d}f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f + f'\mathrm{d}x) = f' + f''\mathrm{d}x. \qquad (2.7.49)$$

Prin înlocuirea expresiilor (2.7.49) ale tangentelor în egalitatea (2.7.48) se obține

$$q\,\mathrm{d}x + H\left(f' + f''\mathrm{d}x\right) - H\ f' = 0\,, \qquad (2.7.50)$$

sau, după eliminarea parantezei şi simplificarea cu $H\,\mathrm{d}x$,

$$f'' + \frac{q}{H} = 0. \qquad (2.7.51)$$

Soluție. Ecuația (2.7.51) este o ecuație diferențială lineară şi neomogenă, de ordinul al doilea.

Soluția sa generală se obține prin integrare directă de două ori şi are expresia

$$f(x) = -\frac{q}{2H}x^2 + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \Re\,. \qquad (2.7.52)$$

Relația (2.7.52) defineşte o familie de parabole parametrizată de constantele c_1 şi c_2. Pentru obținerea unei soluții unic determinate, ecuația (2.7.51) trebuie cuplată cu două condiții suplimentare. În cazul firului, respectivele condiții impun anularea săgeților la capete (figura 2.7.9):

$$f(0) = f(\ell) = 0. \qquad (2.7.53)$$

Aplicând constrângerile de mai sus soluției generale (2.7.52), deducem sistemul de ecuații algebrice liniare

$$c_2 = 0, \quad -\frac{q}{2H}\ell^2 + c_1\ell + c_2 = 0. \qquad (2.7.54)$$

Prin rezolvarea acestuia obținem

$$c_1 = \frac{q\ell}{2H}, \quad c_2 = 0. \qquad (2.7.55)$$

După înlocuirea expresiilor (2.7.55) ale constantelor de integrare, formula (2.7.52) devine

$$f(x) = \frac{q}{2H} x(\ell - x), \quad x \in [0, \ell]. \tag{2.7.56}$$

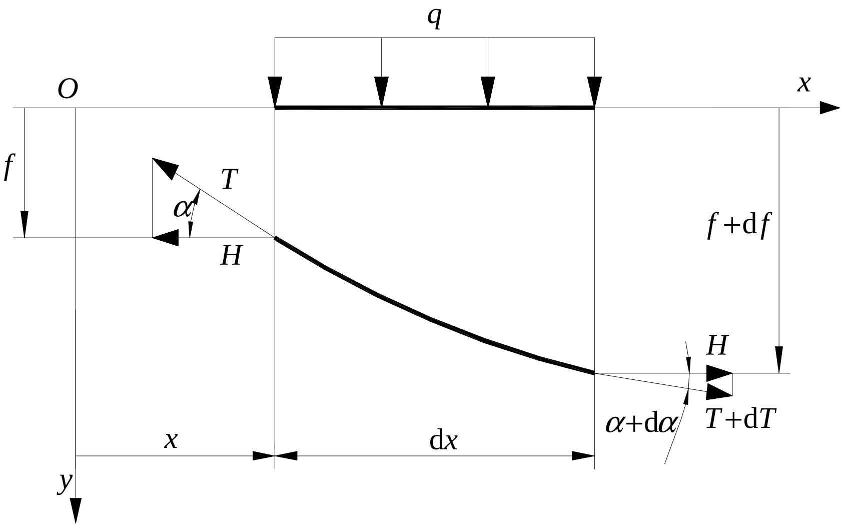


Figura 2.7.9. Element de fir deformat sub acțiunea propriei greutăți și a unei pretensionări orizontale

Aceasta este ecuația unei *parabole*, simetrică față de dreapta verticală $x = \ell/2$. Potrivit relației (2.7.56), săgeata maximă corespunde abscisei $x = \ell/2 = 60/2 =$ 30 m şi are valoarea

$$f\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q}{2H}\frac{\ell}{2}\left(\ell - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{q\ell^2}{8H} = \frac{0,8 \cdot 60^2}{8 \cdot 1000} = 0,36 \text{ m}. \tag{2.7.57}$$

Aplicația 2.7.5. Încovoierea grinzilor drepte. Ecuația fibrei medii deformate (G. Cosovici, S. Comşa)

Problema fizică. Vom determina configurația de echilibru a unei grinzi drepte solicitate la încovoiere pură (figura 2.7.10). Problema va fi rezolvată admițând următoarele ipoteze:

- Grinda are secțiunea transversală constantă pe toată lungimea sa.

- Centrele de greutate ale secțiunilor transversale sunt repartizate pe o dreaptă care coincide cu axa Ox a sistemului de coordonate (originea O fiind la capătul din stânga al grinzii).
- Secțiunea transversală este simetrică atât față de axa Oy (direcția verticală pe schița din figura 2.7.10), cât şi față de axa Oz (perpendiculara pe planul figurii 2.7.10).
- Dimensiunile secțiunii transversale sunt mici în comparație cu lungimea grinzii.
- Momentul încovoietor M este constant pe toată lungimea grinzii şi are direcția axei *Oz*.
- Materialul grinzii are o comportare liniar elastică descrisă de legea lui Hooke.
- Deformațiile de ansamblu ale grinzii sunt mici (altfel spus, deplasările particulelor sale au valori foarte reduse în comparație cu dimensiunile caracteristice ale secțiunii transversale).
- În configurația de echilibru a grinzii încovoiate, secțiunile transversale inițial plane şi perpendiculare pe axa *Ox* rămân plane şi devin perpendiculare pe curba definită de noile poziții ale centrelor de greutate secționale (postulatul lui Bernoulli).

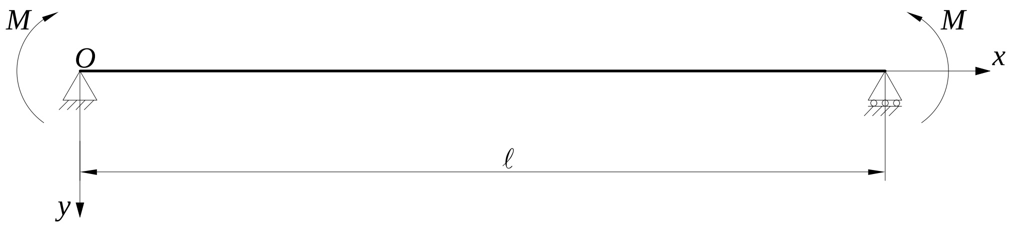


Figura 2.7.10. Grindă solicitată la încovoiere pură

Model matematic. Vom efectua analiza deformațiilor de încovoiere procedând la separarea imaginară a unui element infinitezimal de grindă (figura 2.7.11). Acest element este delimitat în configurația inițială prin secțiunile transversale $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$, având abscisele x, respectiv $x + \mathrm{d}x$. Aplicarea momentului M determină curbarea

grinzii. Altfel spus, segmentele $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$ îşi pierd rectiliniaritatea, transformându-se în arcele $\overset{\frown}{A'C'}$ respectiv $\overset{\frown}{B'D'}$. Axa centrelor de greutate ale secțiunilor transversale urmează aceeaşi evoluție, curbându-se la rândul său.

Totuşi, potrivit postulatului lui Bernoulli, noile secțiuni ($\overline{A'B'}$ şi $\overline{C'D'}$) îşi conservă planeitatea, fiind de asemenea perpendiculare pe noua linie a centrelor de greutate secționale. În aceste condiții, se poate considera că fibrele se curbează luând forma unor arce de cerc concentrice. Deformația de ansamblu a grinzii fiind mică, secțiunile transversale îşi vor conserva simetria. Drept consecință, linia centrelor de greutate ($\overline{RS}$ în figura 2.7.11) îşi va păstra caracterul de fibră medie, iar lungimea sa nu va suferi modificări:

$$\mathrm{d}x = \overline{RS} = \overset{\frown}{R'S'} = \rho\,\mathrm{d}\varphi. \tag{2.7.58}$$

În relația (2.7.58) au fost introduse următoarele notații: $\rho -$ raza de curbură a fibrei medii $\overset{\frown}{R'S'}$; $\mathrm{d}\varphi -$ unghiul la centru subîntins de fibrele longitudinale ale elementului de grindă deformat.

Fie $\overline{mn}$ o fibră longitudinală a elementului de grindă în configurație rectilinie (poziționată față de $\overline{RS}$ prin ordonata y – figura 2.7.11). După aplicarea momentului M, segmentul $\overline{mn}$ se transformă în arcul de cerc $\overset{\frown}{m'n'}$. Întrucât secțiunile grinzii nu îşi schimbă dimensiunile, se poate considera că raza lui $\overset{\frown}{m'n'}$ este $\rho + y$. Lungimea arcului $\overset{\frown}{m'n'}$ este deci

$$\overset{\frown}{m'n'} = (\rho + y)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{2.7.59}$$

Cu ajutorul lui (2.7.58) şi (2.7.59), deformația fibrei $\overline{mn} = \mathrm{d}x$ se va explicita după cum urmează:

$$\varepsilon=\frac{\overset{\frown}{m'n'}-\overline{mn}}{\overline{mn}}=\frac{(\rho+y)\mathrm{d}\varphi-\rho\,\mathrm{d}\varphi}{\rho\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{y}{\rho}. \tag{2.7.60}$$

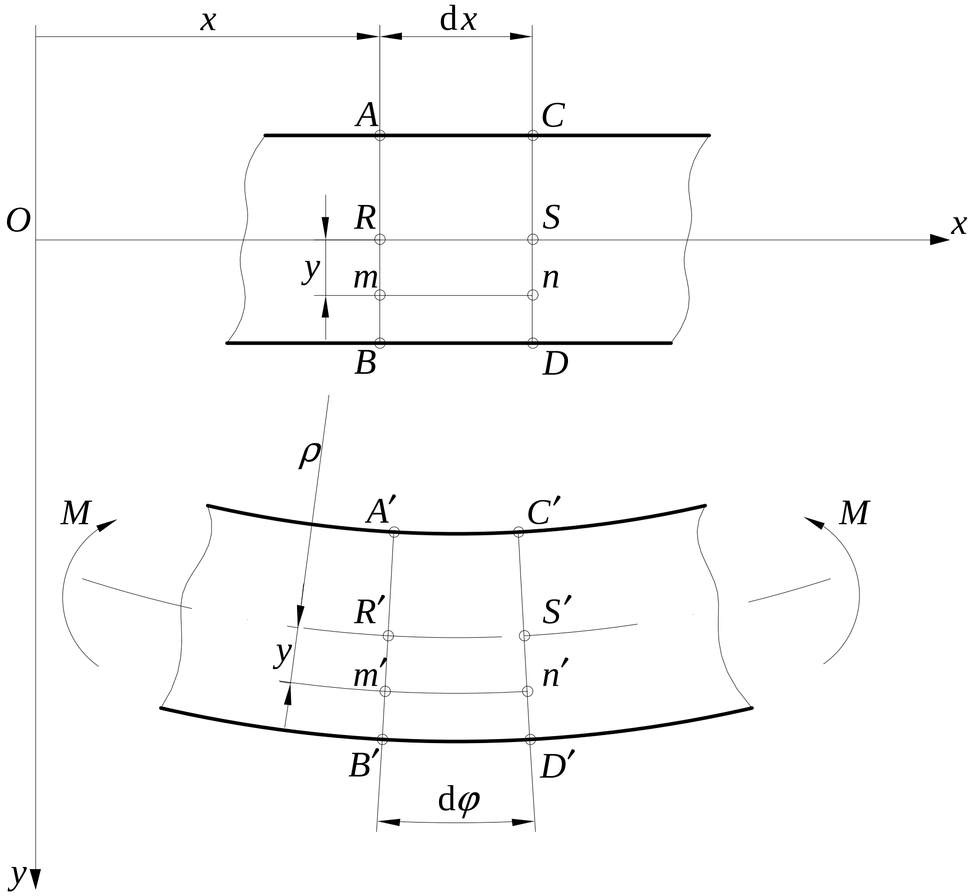


Figura 2.7.11. Deformația unui element infinitezimal de grindă solicitat la încovoiere pură

În stadiul imediat următor, legea lui Hooke,

$$\sigma=E\varepsilon \tag{2.7.61}$$

(E – modulul de elasticitate) permite evaluarea tensiunilor longitudinale datorate încovoierii:

$$\sigma=\frac{Ey}{\rho}. \tag{2.7.62}$$

Înlocuind expresia (2.7.62) a lui σ în condiția de echilibru mecanic scrisă pentru momente

$$M = \int_{\Sigma} \sigma y \,\mathrm{d}\Sigma, \tag{2.7.63}$$

(Σ – domeniul plan reprezentat de secțiunea transversală a grinzii), vom obține

$$\rho = E I_z / M, \tag{2.7.64}$$

unde

$$I_z = \int_{\Sigma} y^2 \,\mathrm{d}\Sigma = \text{const.} \tag{2.7.65}$$

este momentul de inerție secțional raportat la axa *Oz*.

Atât timp cât deformațiile grinzii sunt mici, deplasările particulelor aflate pe fibra medie au o componentă orizontală neglijabilă. În asemenea condiții, raza de curbură ρ depinde numai de săgețile verticale ale acestor particule. Fie

$$f = f(x), \quad x \in [0, \ell], \tag{2.7.66}$$

funcția care definește fibra medie în configurația deformată. Dacă se ține cont de orientarea sistemului de coordonate din figura 5, raza de curbură ρ este exprimabilă sub forma

$$\rho = -\left[1 + (f')^2\right]^{3/2} \Big/ f''. \tag{2.7.67}$$

Ipoteza micilor deformații impune ca rotațiile secțiunilor transversale să fie foarte reduse. Acest fapt permite neglijarea termenului $(f')^2$ în (2.7.67), conducând la expresia aproximativă

$$\rho \approx -1/f''. \tag{2.7.68}$$

Prin înlocuirea lui ρ definit de (2.7.68) în (2.7.64), obținem ecuația diferențială a fibrei medii:

$$f'' + \frac{M}{EI_z} = 0. \tag{2.7.69}$$

Soluție. Soluția generală a lui (2.7.69) rezultă prin două integrări succesive în raport cu variabila *x*:

$$f(x) = -\frac{M}{EI_z}x^2 + c_1 x + c_2, \qquad x \in [0, l], \quad c_1, c_2 \in \Re. \tag{2.7.70}$$

Relația (2.7.70) definește o *parabolă* parametrizată de constantele c_1 și c_2. Pentru determinarea acestora, ecuația (2.7.69) trebuie cuplată cu două condiții care impun anularea săgeților de capăt:

$$f(0) = f(\ell) = 0. \tag{2.7.71}$$

Aplicând constrângerile (2.7.71) soluției generale (2.7.70), deducem sistemul de ecuații

$$c_2 = 0, \quad -\frac{M}{EI_z}\ell^2 + c_1\ell + c_2 = 0. \tag{2.7.72}$$

Prin rezolvarea acestuia se obține

$$c_1 = \frac{M\ell}{EI_z}, \quad c_2 = 0. \tag{2.7.73}$$

După înlocuirea expresiilor (2.7.73) ale constantelor de integrare c_1 și c_2, formula (2.7.70) devine

$$f(x) = \frac{M}{EI_z}x(\ell - x), \quad x \in [0, \ell]. \tag{2.7.74}$$

Această ultimă relație definește soluția particulară a ecuației diferențiale (2.7.69) care verifică și condițiile la limită (2.7.71). Formula de mai sus descrie o parabolă simetrică față de dreapta verticală $x = l/2$. De fapt, potrivit relației (2.7.74), săgeata maximă corespunde tocmai punctului de abscisă $x = l/2$ și are expresia

$$f\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{M\ell^2}{4EI_z}. \qquad (2.7.75)$$

Aplicația 2.7.6. Flambajul elastic al unei grinzi articulate la capete şi supuse unei solicitări axiale (G. Cosovici, S. Comşa**)**

Problema fizică. În anumite condiții de solicitare, unele sisteme mecanice pot avea mai multe configurații de echilibru. Figura 2.7.12 ilustrează această posibilitate pentru cazul unei grinzi articulate la capete şi supuse unei solicitări axiale *F*. Atât timp cât nivelul forței F nu depăşeşte un nivel critic F_{cr}, grinda rămâne dreaptă preluând încărcarea în regim de compresiune pură. Atunci când F atinge valoarea F_{cr}, oricare din cele două configurații de echilibru reprezentate în figura 6 devine posibilă. Teoretic, orice perturbație este în măsură să determine trecerea bruscă a grinzii la forma curbilinie. Acest fenomen se numeşte *flambaj*. Este uşor de remarcat faptul că, în noua configurație de echilibru, încărcarea va fi preluată atât în regim de compresiune, cât şi prin încovoiere. Dacă grinda este capabilă să revină la forma inițială după eliminarea forței *F*, flambajul se numeşte *elastic*. În practică, pot fi întâlnite şi situații de flambaj *ireversibil,* atunci când solicitările din material depăşesc limita de curgere.

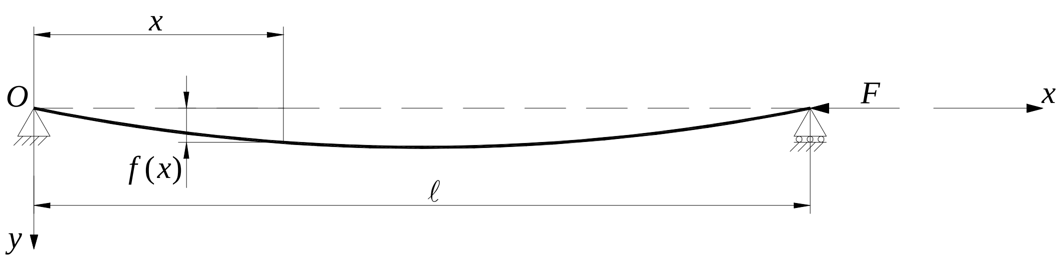


Figura 2.7.12. Flambajul elastic al unei grinzi articulate la capete şi supuse unei solicitări axiale

În ceea ce urmează vor fi stabilite condițiile de trecere a grinzii din figura 2.7.12 de la configurația dreaptă la configurația curbilinie, admițând că flambajul este de tip elastic. După cum s-a menționat anterior, în configurația sa curbilinie, grinda preia

încărcarea axială *F*, atât în regim de compresiune, cât şi în regim de încovoiere. Plecând de la această observație, flambajul va fi analizat scriind ecuația fibrei medii deformate şi căutând condițiile în care ea admite mai multe soluții.

Model matematic. Considerăm o secțiune transversală oarecare a grinzii care şi-a pierdut forma rectilinie. Această secțiune este poziționată prin abscisa *x* (figura 2.7.12). În condiții de flambaj, săgeata *f* a fibrei medii defineşte un braț al forței axiale *F*. Rezultă astfel un moment încovoietor

$$M = fF\,. \tag{2.7.76}$$

Printr-o metodă perfect similară celei de la aplicația precedentă, se poate deduce următoarea ecuație diferențială care defineşte configurația de flambaj a fibrei medii:

$$f'' + \frac{F}{EI_z} f = 0. \tag{2.7.77}$$

Pentru comoditatea calculelor, este convenabilă definirea parametrului

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F}{EI_z}}\cdot \tag{2.7.78}$$

Cu ajutorul acestei mărimi, (2.7.77) se va rescrie sub forma

$$f'' + \omega_0^2 f = 0. \tag{2.7.79}$$

Soluție. Ecuația (2.7.79) este o ecuație diferențială ordinară de ordinul II, lineară şi omogenă, cu coeficienți constanți. Soluția ei generală este (vezi §2.4.1)

$$f(x) = A_1 \sin \omega_0 x + A_2 \cos \omega_0 x, \quad x \in [0, \ell], \tag{2.7.80}$$

unde A_1 şi A_2 sunt constante care se determină impunând satisfacerea a două condiții la limită care reflectă blocajul mecanic exercitat de articulațiile de la capetele grinzii (figura 2.7.12):

$$f(0) = 0, \quad f(\ell) = 0. \tag{2.7.81}$$

Interpretare fizică. Aplicând constrângerile (2.7.81) funcției (2.7.80), obținem două ecuații în necunoscutele A_1 şi A_2:

$$A_2 = 0, \quad A_1 \sin \omega_0 \ell + A_2 \cos \omega_0 \ell = 0 \tag{2.7.82}$$

sau, echivalent,

$$A_1 \sin \omega_0 \ell = 0, \quad A_2 = 0. \tag{2.7.83}$$

Flambajul grinzii poate fi descris numai de o soluție netrivială $A_1 \neq 0$. Pentru ca sistemul (2.7.83) să devină compatibil cu această constrângere este necesar ca ω_0 să verifice egalitatea

$$\sin \omega_0 \ell = 0, \quad \omega_0 \neq 0. \tag{2.7.84}$$

Din (2.7.84) rezultă condiția

$$\omega_0 l = k\pi, \qquad k \in \mathfrak{N}^* \tag{2.7.85}$$

sau, dacă ținem cont de expresia (2.7.85) a parametrului ω_0,

$$F_{cr,1} = \frac{k^2 \pi^2 E I_z}{l^2}, \qquad k \in \mathfrak{N}^* \tag{2.7.86}$$

Formula (2.7.86) defineşte un şir infinit de valori critice ale forței *F*. Fiecare dintre aceste nivele ale încărcării produce un mod de flambaj.

Sub aspect practic, cea mai importantă este încărcarea minimă. Aceasta corespunde indicelui $k = 1$:

$$F_{cr,1} = F_{cr,\min} = \frac{\pi^2 E I_z}{\ell^2}. \tag{2.7.87}$$

Analizând relația (2.7.87), constatăm că valoarea lui $F_{cr,\min}$ este cu atât mai redusă cu cât raportul I_z / ℓ^2 este mai mic (altfel spus, cu cât dimensiunile transversale ale grinzii sunt mai mici în comparație cu lungimea ℓ).

Aplicația 2.7.7. Starea de tensiuni din tubul cilindric cu pereți groşi (G. Cosovici, S. Comşa)

Model matematic. Considerăm cazul unui tub cilindric rectiliniu de lungime infinită, a cărui secțiune transversală este un inel circular de raze $r_1 < r_2$ (figura 2.7.13). Atât pe interiorul tubului, cât şi pe exterior acționează presiuni ($p_1 -$ presiunea interioară, respectiv $p_2 -$ presiunea exterioară).

Simetria axială a tubului precum şi a încărcărilor recomandă utilizarea unui sistem de coordonate cilindrice (r,θ,z). Axa coordonatei z este coliniară cu axa de simetrie a tubului. Cât priveşte coordonatele r şi θ, acestea se măsoară într-o secțiune transversală (figura 2.7.13). Lungimea infinită a tubului, împreună cu simetria axială a geometriei sale şi a încărcărilor determină dependența deplasărilor, deformațiilor şi tensiunilor exclusiv de raza r:

$$\begin{aligned} &u_r = u_r(r), \quad u_\theta = u_\theta(r), \quad u_z = u_z(r), \\ &\varepsilon_r = \varepsilon_r(r), \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(r), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(r), \\ &\sigma_r = \sigma_r(r), \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(r), \quad \sigma_z = \sigma_z(r). \end{aligned} \tag{2.7.88}$$

În egalitățile de mai sus au fost utilizate următoarele notații: $u_r, u_\theta, u_z -$ componentele câmpului deplasărilor, $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z -$ deformațiile principale şi $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z -$ tensiunile principale, asociate direcțiilor radială, circumferențială, respectiv axială. Datorită lungimii infinite a tubului, deplasările şi deformațiile axiale sunt nule:

$$u_z = 0, \quad \varepsilon_z = 0. \tag{2.7.89}$$

În plus, repartiția simetrică a încărcărilor determină anularea deplasării circumferențiale:

$$u_\theta = 0. \tag{2.7.90}$$

Singura componentă diferită de zero a câmpului deplasărilor este deci u_r. Aceasta determină complet deformațiile ε_r şi ε_θ:

$$\varepsilon_r = u_r', \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}\cdot \tag{2.7.91}$$

Admitem că materialul tubului are o comportare elastică descrisă de legea lui Hooke:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta\right],\\
\sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_r + (1-\nu)\varepsilon_\theta\right],\\
\sigma_z &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta\right),
\end{aligned} \tag{2.7.92}$$

în care E este modulul lui Young, iar ν este coeficientul lui Poisson

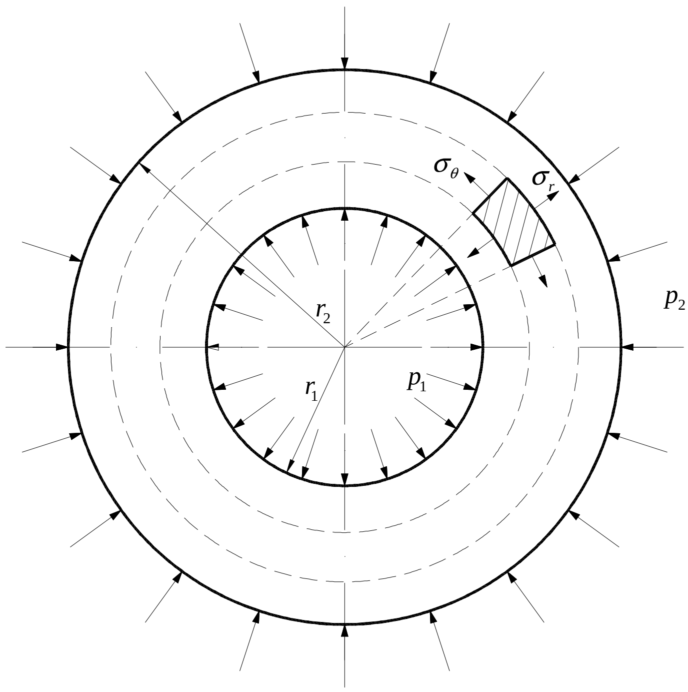


Figura 2.7.13. Secțiune transversală printr-un tub cu pereți groşi solicitat de presiunile p_1 și p_2 pe suprafețele sale interioară, respectiv exterioară

Cu ajutorul relațiilor (2.7.91), formulele (2.7.92) devin

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)u_r' + \nu\frac{u_r}{r}\right]\\
\sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu u_r' + (1-\nu)\frac{u_r}{r}\right]\\
\sigma_z &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(u_r' + \frac{u_r}{r}\right).
\end{aligned} \tag{2.7.93}$$

Observăm că, în urma ultimei transformări, tensiunile au fost exprimate ca dependențe de funcția $u_r = u_r(r)$.

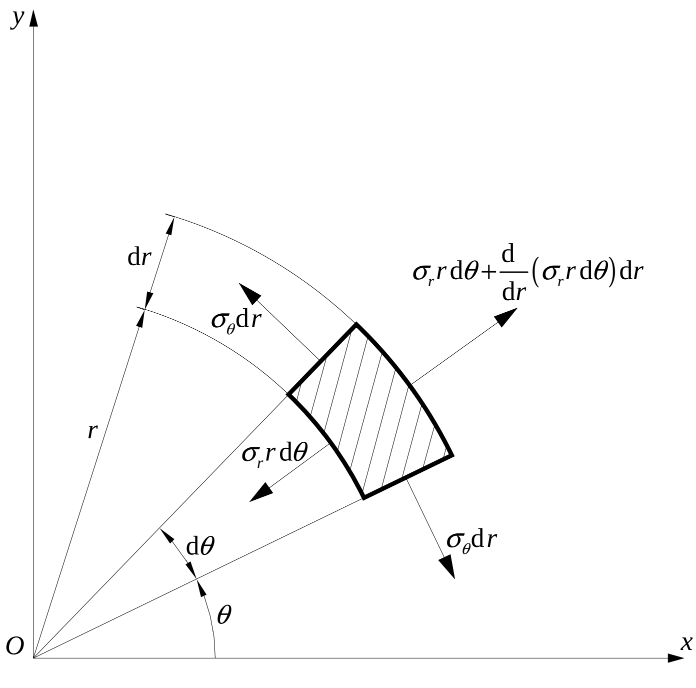


Figura 2.7.14. Schema de solicitare a unui element de material separat din peretele tubului

Aceasta din urmă se determină impunând condiția de echilibrare radială a încărcărilor preluate de un element infinit mic separat din peretele tubului (figura 2.7.14):

$$\sigma_r r\,\mathrm{d}\theta + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\sigma_r r\,\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}r - \sigma_r r\,\mathrm{d}\theta - 2\sigma_\theta \mathrm{d}r \sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = 0. \tag{2.7.94}$$

Folosind în egalitatea de mai sus aproximarea

$$\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} \approx \frac{\mathrm{d}\theta}{2} \tag{2.7.95}$$

şi operând o serie de simplificări, obținem

$$r\sigma_r' + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \tag{2.7.96}$$

Cu ajutorul formulelor (2.7.93), condiția de echilibru (2.7.96) devine

$$u_r'' + \frac{u_r'}{r} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \tag{2.7.97}$$

Soluție. Ecuația diferențială (2.7.97) este de tip Euler. Ea are soluția generală de forma (vezi §2.6)

$$u_r(r) = A_1 r + \frac{A_2}{r}, \tag{2.7.98}$$

în care A_1 şi A_2 sunt constante. Pentru determinarea acestora se impun condițiile la limită

$$\sigma_r(r_1) = -p_1, \quad \sigma_r(r_2) = -p_2 \tag{2.7.99}$$

(semnul minus ia în considerare efectul de compresiune al încărcărilor aplicate asupra pereților tubului – vezi figura 2.7.14). Dacă se apelează la formulele (2.7.93) şi (2.7.98), constrângerile de mai sus pot fi explicitate sub forma

$$\begin{aligned} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[A_1 - (1-2\nu)\frac{A_2}{r_1^2}\right] &= -p_1 \\ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[A_1 - (1-2\nu)\frac{A_2}{r_2^2}\right] &= -p_2. \end{aligned} \tag{2.7.100}$$

Prin rezolvarea sistemului (2.7.100) se obțin constantele

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ A_2 &= \frac{1+\nu}{E}\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}(p_1 - p_2). \end{aligned} \tag{2.7.101}$$

După înlocuirea expresiilor de mai sus ale lui A_1 şi A_2 în (2.7.98) rezultă soluția particulară

$$u_r(r) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\nu}{E}\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\frac{p_1 - p_2}{r}. \qquad (2.7.102)$$

În final, din (2.7.93) şi (2.7.102) deducem distribuțiile radiale ale tensiunilor din pereții tubului:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \\
\sigma_\theta &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \\
\sigma_z &= 2\nu \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta).
\end{aligned} \qquad (2.7.103)$$

Interpretare fizică. Este interesant de remarcat faptul că tensiunea axială σ_z are aceeaşi valoare pe toată grosimea peretelui. În ceea ce priveşte componentele σ_r şi σ_θ, acestea au o distribuție variabilă pe rază, dar suma lor este de asemenea constantă.

Aplicația 2.7.8 (M.V. Soare [])

Problema fizică. Peste un catarg OA, de înălțime *l*, este trecut un cablu BOC (figura 2.7.15, a). Prin întinderea cablului se introduce o forță de compresiune în catarg. Se cere să se determine valoarea forței critice pentru care aceasta îşi pierde stabilitatea formei.

Model matematic. Fie α unghiul de înclinare al cablului față de orizontală, în poziția inițială (figura 2.7.15, a). Să presupunem că, datorită producerii flambajului, capătul superior *O* suferă o deplasare laterală *f*. Atunci unghiul de înclinare a părții din stânga a cablului se reduce cu un unghi $\Delta\alpha$, în timp ce unghiul de înclinare a părții din dreapta creşte cu $\Delta\alpha$ (figura 2.7.15, b).

Dacă *N* este efortul de întindere în cablu, din condiția inițială de echilibru rezultă

$$N = \frac{P}{2\sin\alpha}. \qquad (2.7.104)$$

Ca urmare a deformării ansamblului, se va dezvolta o forță orizontală

$$H = N\cos(\alpha - \Delta\alpha) - N\cos(\alpha + \Delta\alpha) = 2N\sin\alpha\sin\Delta\alpha;$$

cum $\Delta\alpha$ este foarte mic în comparație cu α ($\sin\Delta\alpha \cong \Delta\alpha$),

$$H = 2N\sin\alpha\Delta\alpha = P\Delta\alpha. \qquad (2.7.105)$$

Dacă D este proiecția punctului O pe dreapta BO' (O' este punctul în care ajunge O prin flambaj), atunci din triunghiul ODO' rezultă (figura 2.7.15, c)

$$\overline{OD} = \overline{BO}\Delta\alpha = f\sin\alpha;$$

deoarece $\overline{BO} = l/\sin\alpha$, se obține

$$\Delta\alpha = \frac{f\sin\alpha}{\frac{l}{\sin\alpha}} = \frac{f}{l}\sin^2\alpha, \qquad (2.7.106)$$

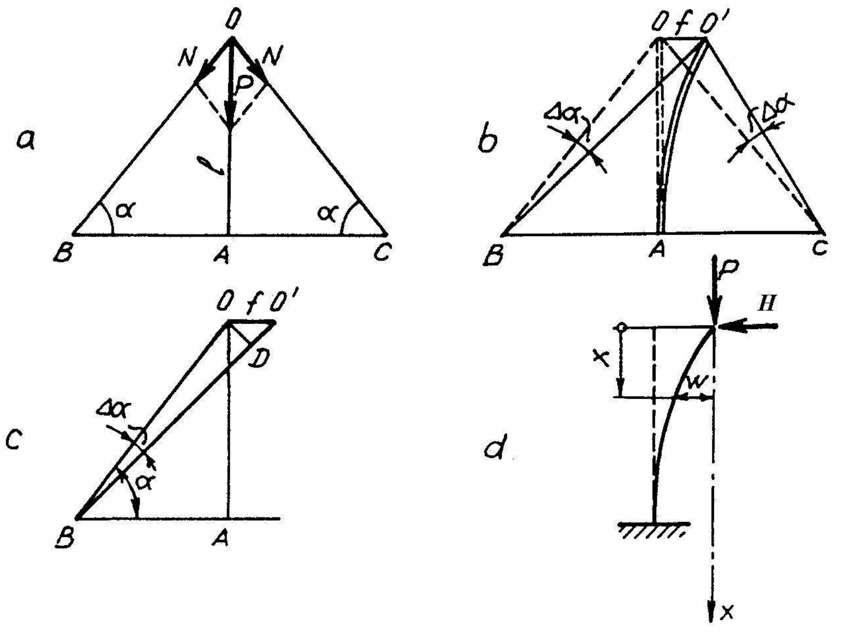


Figura 2.7.15. a) Schema geometrică a catargului şi a cablului; b) deplasarea laterală f; c) deplasarea capătului superior; d) schema statică a catargului

aşa încât

$$H = P\frac{f}{l}\sin^2\alpha. \qquad (2.7.107)$$

Avem aşadar de determinat forţa critică a unei console OA, încărcată la capătul liber cu forţele P şi H (figura 2.7.15, d).

Alegând originea x-ilor la capătul superior al barei, ataşată acesteia, într-o secţiune curentă x, momentul încovoietor se scrie

$$M(x) = Pw - Hx = P\left(w - x\frac{f}{l}\sin^2\alpha\right). \qquad (2.7.108)$$

Ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate a barei va fi

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{P}{EI}\left(w - x\frac{f}{l}\sin^2\alpha\right),$$

unde EI este rigiditatea la încovoiere, sau

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + \beta^2 w = \beta^2 x\frac{f}{l}\sin^2\alpha, \qquad (2.7.109)$$

cu notaţia uzuală

$$\beta^2 = \frac{P}{EI}. \qquad (2.7.110)$$

Soluţie. Soluţia generală a ecuaţiei lineare de ordinul II, cu coeficienţi constanţi (2.7.109) se scrie (vezi §2.4)

$$w = A\sin\beta x + B\cos\beta x + x\frac{f}{l}\sin^2\alpha, \qquad (2.7.111)$$

iar rotaţia secţiunii transversale este dată de

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \beta A\cos\beta x - \beta B\sin\beta x + \frac{f}{l}\sin^2\alpha. \qquad (2.7.112)$$

Condiţiile la capete $w(0) = 0$, $w(l) = 0$, $(\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)_{x=l} = 0$ conduc la următorul sistem de ecuaţii lineare şi omogene în A, B şi f:

$$\begin{aligned}
&B = 0,\\
&A\sin\beta l + B\cos\beta l + f\sin^2\alpha = f,\\
&\beta A\cos\beta l - \beta B\sin\beta l + \frac{f}{l}\sin^2\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{2.7.113}$$

Ținând seama că $B = 0$, deducem

$$\begin{bmatrix} \sin\beta l & -\cos^2\alpha \\ \beta\cos\beta l & \frac{1}{l}\sin^2\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Acest sistem are soluții nenule (corespunzând poziției stabile de echilibru) dacă

$$\det\begin{bmatrix} \sin\beta l & -\cos^2\alpha \\ \beta\cos\beta l & \frac{1}{l}\sin^2\alpha \end{bmatrix} = 0;$$

se obține astfel următoarea ecuație caracteristică

$$\frac{\tan\beta l}{\beta l} = -\cot^2\alpha,$$

ale cărei soluții pot fi determinate numai numeric. De exemplu, pentru $\alpha = \pi/4$ se obține $\beta l = 2.02876$, deci forța critică este dată de

$$P_{cr} = 2.02876^2\frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(1.5485l)^2}.$$

Aplicația 2.7.9. Flambajul barelor. Probleme de mecanica construcțiilor (M.V.Soare [19,20])

1. Flambajul barei dublu articulate

Problema fizică. O bară zveltă este comprimată axial la capete de două forțe P. La atingerea unei valori critice a forțelor (P_{cr}), bara părăsește forma rectilinie de echilibru. Știind că bara este dublu articulată la capete, se cere să se determine forța critică de flambaj (primele două valori) şi forma fibrei medii deformate a barei.

Model matematic. Pentru rezolvarea problemei, se consideră momentul în care bara a părăsit forma rectilinie de echilibru şi a căpătat o formă curbilinie, foarte apropiată de poziția inițială. În această situație, într-o secțiune curentă *x*, momentul încovoietor va fi $M = Pw$, unde *w* este deplasarea, astfel încât ecuația diferențială a fibrei medii deformate a barei se scrie (vezi şi aplicația 2.7.6)

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{Pw}{EI}, \qquad (2.7.114)$$

adică

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{P}{EI} w = 0, \qquad (2.7.115)$$

în care *EI* este rigiditatea la încovoiere minimă a secțiunii transversale a barei.

Pentru simplitate, folosim din nou notația (2.7.110) şi ecuația (2.7.115) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + \beta^2 w = 0. \qquad (2.7.116)$$

Alegând originea *x*-ilor la capătul superior, condițiile la limită sunt

$$w(0) = w(l) = 0, \qquad (2.7.117)$$

unde *l* este lungimea barei (figura 2.7.16).

Soluție. Modelul (2.7.116), (2.7.117) reprezintă, din punct de vedere matematic, o problemă bilocală omogenă, care admite întotdeauna soluția identic nulă. Trebuie deci determinate valori ale lui β, denumite *valori proprii*, astfel încât problema să admită cel puțin încă o soluție, diferită de cea identic nulă, denumită *funcție proprie*. Asemenea probleme poartă numele de *probleme Sturm-Liouville*.

Căutând soluții de forma $w = \mathrm{e}^{\lambda x}$ (vezi §2.4), ajungem la ecuația caracteristică $\lambda^2 + \beta^2 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\beta$. Soluția generală a ecuației (2.7.116) se poate scrie sub forma

$$w = A\sin\beta x + B\cos\beta x\,, \tag{2.7.118}$$

A şi B fiind constante de integrare.

Condițiile la limită $w(0) = w(l) = 0$ implică $B = 0$ şi $A\sin\beta l = 0$.

Cum $A \neq 0$ (axa barei este rectilinie, deci situația premergătoare flambajului), iar $\beta \neq 0$ (bara este neîncărcată), rezultă $\sin\beta l = 0$, cu rădăcinile $\beta l = n\pi$, $n = 1, 2, 3\ldots$

Revenind la notația (2.7.110), se obține familia de valori proprii

$$P_{cr} = \beta^2 EI = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}\,,\; n = 1, 2, 3\ldots$$

şi ecuația fibrei medii deformate, care se deduce din (2.7.118), ținând seama de valorile găsite pentru B şi β

$$w = A\sin\frac{n\pi x}{l}\,,\; n = 1, 2, 3\ldots \tag{2.7.119}$$

Se observă că factorul A, reprezentând amplitudinea fibrei medii deformate, rămâne nedeterminat.

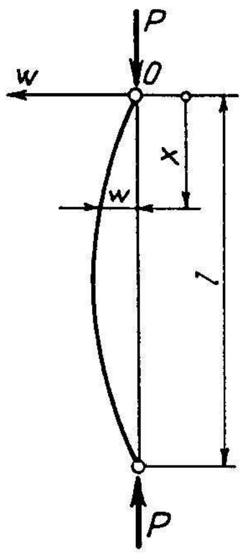


Figura 2.7.16. Flambajul barei dublu articulate

Aceasta se explică prin faptul că, la rezolvarea problemei, a fost utilizată ecuația diferențială aproximativă a fibrei medii deformate; ecuația (2.7.119) reprezintă o sinusoidă cu semiunda l/n.

Din punct de vedere practic, interesează valoarea minimă a forței critice (pentru $n=1$). Aceasta mai este numită şi forța critică Euler-iană

$$P_{cr} = P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \tag{2.7.120}$$

Fibra medie deformată este o sinusoidă de semiundă l şi este dată de

$$w = w_{\max} \frac{\pi x}{l}, \tag{2.7.121}$$

unde $w_{\max}$ corespunde mijlocului deschiderii.

Pentru valori mai mari ale lui *n*, de exemplu, $n=2$, aceasta ar corespunde cazului când există la mijlocul deschiderii, un reazem simplu. Forța critică corespunzătoare este

$$P_{cr,2} = 2^2 \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 4P_{cr}. \tag{2.7.122}$$

2. Flambajul barei articulate-încastrate

Problema fizică. Să se determine forța critică de flambaj a unei bare articulate la un capăt şi încastrată perfect la celălalt capăt.

Model matematic. Datorită încastrării, în articulație apare şi o reacțiune *H*, normală pe axa barei, jucând rolul unui parametru nedeterminat. Momentul încovoietor într-o secțiune curentă *x*, evaluat pe forma deformată, este $M = Pw + Hx$ astfel încât ecuația diferențială a problemei este

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{P}{EI} w = -\frac{H}{EI} x, \tag{2.7.123}$$

unde *P* este forța de compresiune şi *EI* rigiditatea la încovoiere.

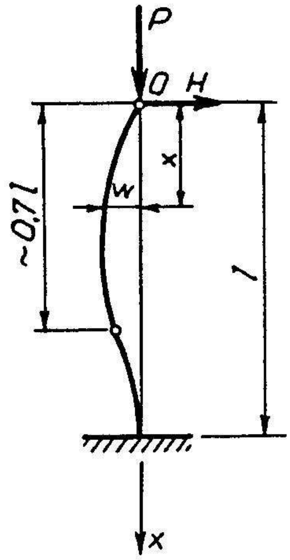


Figura 2.7.17. Flambajul barei articulate-încastrate

Cu notația (2.7.110), ecuația (2.7.123) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + \beta^2 w = -\frac{H}{EI} x, \tag{2.7.124}$$

Condițiile la limită se scriu

$$w(0) = 0,\ w(l) = 0,\ (\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)_{x=l} = 0. \tag{2.7.125}$$

Soluție. Modelul de mai sus reprezintă tot o problemă Sturm-Liouville. Soluția generală a ecuației omogene asociate lui (2.7.124) este tot (2.7.118). O soluție particulară rezultă sub formă de monom. Soluția generală a ecuației neomogene și derivata sa se scriu sub forma

$$\begin{gathered} w = -\frac{H}{P} x + A \sin \beta x + B \cos \beta x, \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -\frac{H}{P} + \beta (A \cos \beta x - B \sin \beta x). \end{gathered} \tag{2.7.126}$$

Prima condiție la limită implică $B=0$. Celelalte două condiții conduc la un sistem algebric linear, pe care trebuie să-l satisfacă $(-H/P)$ şi A:

$$-\frac{H}{P}l+A\sin\beta l=0,\ \ -\frac{H}{P}+A\cos\beta l=0. \tag{2.7.127}$$

Acest sistem este omogen, deci are soluții nenule doar dacă determinantul asociat se anulează

$$\det\begin{bmatrix} l & \sin\beta l \\ l & \beta\cos\beta l \end{bmatrix}=0.$$

Calculând determinantul, obținem ecuația transcendentă

$$\tan\beta l=\beta l. \tag{2.7.128}$$

Rădăcina minimă a acestei ecuații (conform tabelului 2.7.1)

$$\beta l=4.4934095=\frac{\pi}{0.699155653}\cong\frac{\pi}{0.7}$$

conduce la forța critică minimă

$$P_{cr}\cong\frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}. \tag{2.7.129}$$

3. Flambajul barei dublu încastrate

Problema fizică. Să se determine forța critică de flambaj a unei bare articulată la un capăt şi încastrată perfect la celălalt capăt.

Model matematic. Ținând seama şi de cazul precedent, ecuația diferențială a problemei este

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}+\frac{P}{EI}w=-\frac{H}{EI}x-\frac{M_0}{EI}, \tag{2.7.130}$$

unde P este forța de compresiune, H şi M_0 (reacțiunea din origine, normală pe axa barei, respectiv momentul de încastrare) sunt parametri nedeterminați, EI este rigiditatea

la încovoiere şi w este săgeata necunoscută (figura 2.7.16). Condițiile bilocale se scriu în acest caz astfel

$$w(0)=w(l)=0\,,\ (\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)_{x=0}=(\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)_{x=l}=0\,, \qquad (2.7.131)$$

unde l este lungimea barei.

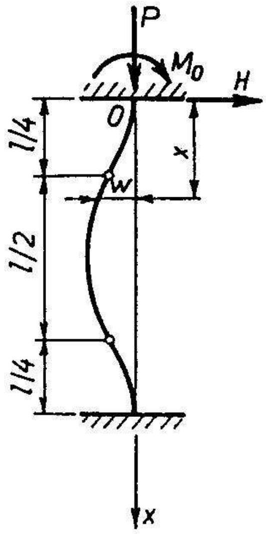


Figura 2.7.18. Flambajul barei dublu încastrate

Soluție. Modelul matematic se prezintă sub forma unei probleme Sturm-Liouville. Mai întâi găsim soluția ecuației lineare şi neomogene (vezi §2.4); aceasta şi derivata ei sunt

$$\begin{aligned} w &= -\frac{H}{P}x-\frac{M_0}{P}+A\sin\beta x+B\cos\beta x,\\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= -\frac{H}{P}+\beta(A\cos\beta x-B\sin\beta x). \end{aligned} \qquad (2.7.132)$$

Condițiile bilocale conduc la sistemul algebric linear şi omogen, scris sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \beta & 0 & -1 & 0 \\ \sin\beta l & \cos\beta l & -l & -1 \\ \beta\cos\beta l & -\beta\sin\beta l & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ H/P \\ M_0/P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.7.133}$$

Pentru ca sistemul să admită soluții nenule trebuie ca determinantul asociat lui să se anuleze. Se obține astfel ecuația caracteristică

$$2(1-\cos\beta l)-\beta l\sin\beta l = 2\sin\beta l\left(\tan\frac{\beta l}{2}-\frac{\beta l}{2}\right)=0\,, \tag{2.7.134}$$

ale cărei rădăcini sunt $\beta l = 2n\pi,\ n = 1, 2, 3\dots$. Rădăcina cea mai mică $\beta_1 l = 2\pi$ conduce la forța critică

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}. \tag{2.7.135}$$

Rădăcina minimă corespunzătoare celui de al doilea factor este mai mare decât $\beta_1 l/2$.

4. Bara dublu articulată încărcată cu forțe axiale şi cu o forță transversală

Problema fizică. O bară dreaptă, dublu articulată, de lungime *l*, este solicitată axial prin două forțe de compresiune *P* şi încărcată transversal cu o forță concentrată *F* , aplicată la mijlocul deschiderii (figura 2.7.19). Se cere să se determine săgețile *w*.

Model matematic. Pentru o secțiune transversală de abscisă *x* putem scrie momentul de încovoiere

$$M = Pw + \frac{1}{2}Fx.$$

Problema fizică este deci modelată de ecuația diferențială lineară de ordinul II cu coeficienți constanți

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\beta^2 w=-\frac{F}{2EI}x,\qquad x\in\left[0,\frac{l}{2}\right],\quad \beta^2=\frac{P}{EI},$$

căreia i se asociază condițiile la capete $w(0)=0$, $(dw/dx)_{x=l/2}=0$; ultima este o condiție de simetrie. Modelul matematic este reprezentat de o problemă bilocală lineară.

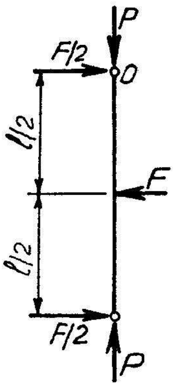


Figura 2.7.19. Bara dublu articulată încărcată cu forțele axiale P și cu o forță transversală F

Soluție. Soluția generală a ecuației de mai sus este (vezi §2.4)

$$w=-\frac{F}{2P}x+A\sin\beta x+B\cos\beta x,$$

şi deci

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{F}{2P}+\beta A\cos\beta x-\beta B\sin\beta x.$$

Aplicând condițiile la capete, rezultă

$$A=\frac{F}{2P\beta\cos\frac{\beta l}{2}},\ B=0,$$

astfel încât

$$w=\frac{F}{2P\beta}\left(-\beta x+\frac{\sin\beta x}{\cos\frac{\beta l}{2}}\right).$$

Momentul de încovoiere are expresia

$$M = \frac{F}{2\beta}\frac{\sin\beta x}{\cos\frac{\beta l}{2}}.$$

Pentru $P \to P_E = \pi^2 EI/l^2$ (forța lui Euler) avem $\cos(\beta l/2) = 0$, deci w şi M tind la infinit, independent de intensitatea forței transversale F (*instabilitate prin divergență*).

Aplicația 2.7.10 (M.V.Soare [19,20])

Problema fizică. Să se studieze flambajul lateral al unei grinzi cu secțiune zveltă, supusă la încovoiere.

Model matematic. Grinzile supuse la încovoiere având o secțiune zveltă îşi pot pierde forma plană de echilibru atunci când momentul încovoietor depăşeşte o anumită valoare critică (figura 2.7.20). Grinda îşi pierde stabilitatea în zona comprimată; axa grinzii se curbează în planul ei de rigiditate minimă, iar diferitele secțiuni transversale ale grinzii se rotesc în jurul axei. Acest fenomen de pierdere a stabilității formei de schilibru a unei grinzi supuse la încovoiere este denumit *flambaj lateral* sau *flambaj din încovoiere*.

Studiul flambajului lateral conduce la ecuația diferențială ordinară lineară şi omogenă

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_z GI_t}\theta = 0, \tag{2.7.136}$$

în care

- θ reprezintă rotirea de torsiune a secțiunii transversale
- EI_z – rigiditatea la încovoiere minimă a grinzii în planul z,
- GI_t – rigiditatea la torsiune a secțiunii grinzii,
- M – momentul încovoietor în planul y.

Sunt considerate secțiunile simple (fără tălpi).

Introducând notația

$$\beta = \frac{M}{\sqrt{EI_z GI_t}}, \tag{2.7.137}$$

ecuația (2.7.136) devine

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \beta^2\theta = 0, \tag{2.7.138}$$

analogă celei corespunzătoare flambajului barei dublu articulate de mai sus. Acestei ecuații i se asociază condițiile bilocale

$$\theta(0) = \theta(l) = 0, \tag{2.7.139}$$

obținându-se astfel o problemă Sturm-Liouville.

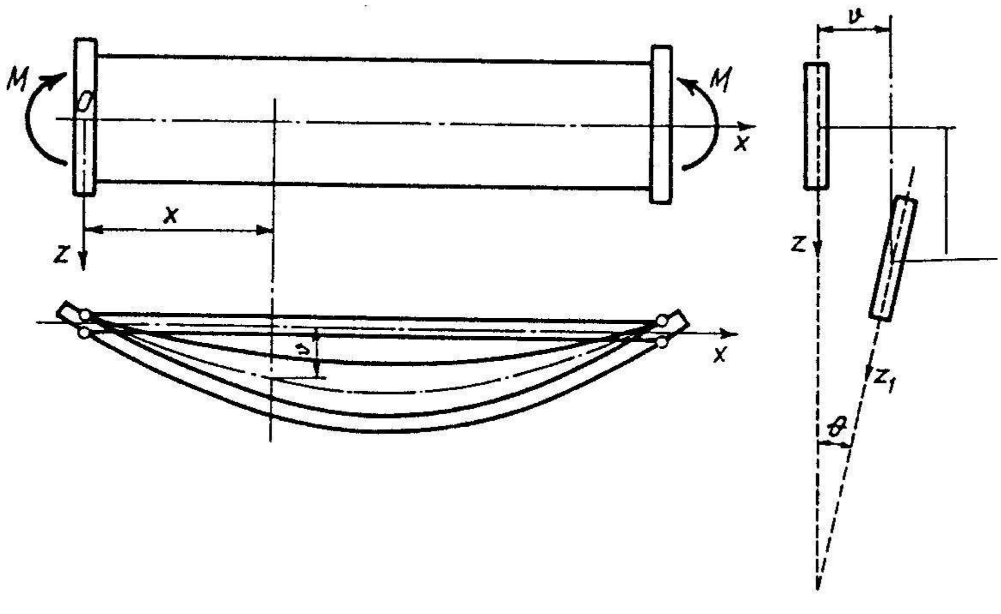


Figura 2.7.20. Flambajul lateral al unei grinzi cu secțiune simplă

Soluție. Soluția generală a ecuației (2.7.138) este

$$\theta = A\sin\beta x + B\cos\beta x.$$

Aplicând condițiile la capete, se obține valoarea proprie minimă $\beta = \pi/l$, așa încât

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l}\sqrt{EI_z GI_t}.$$

Aplicația 2.7.11 (M.V.Soare [19,20])

Problema fizică. O bară de oțel, în consolă, încărcată cu forța *P*, este rezemată lateral cu un resort având constanta elastică *c*. Se cere să se determine forța critică de flambaj P_{cr}.

Model matematic. Expresia momentului încovoietor într-o secțiune transversală curentă de abscisă *x* este dată de (figura 2.7.21)

$$M = P(f - w) - cf(l - x), \tag{2.7.140}$$

unde *P* este forța axială, *f* – deflexia la capătul cu reazem elastic (constanta elastică este *c*) şi *l* este lungimea barei.

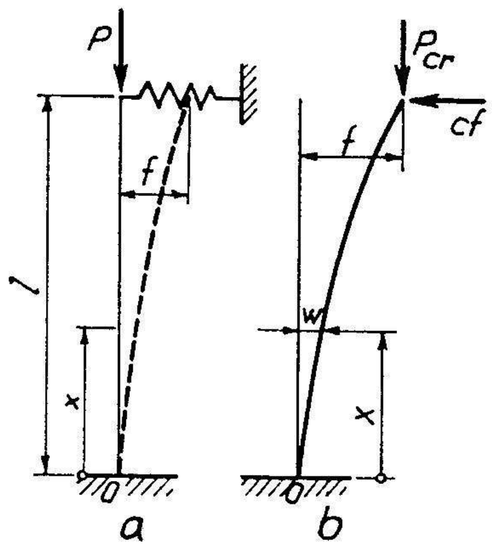


Figura 2.7.21. Bara încărcată axial cu forța P, încastrată și rezemată la cele două capete

Cu notația (2.7.110), rezultă ecuația diferențială a fibrei medii deformate a barei

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \beta^2 w = \beta^2 \left[f - \frac{cf}{P}(l - x) \right], \tag{2.7.141}$$

la care se adaugă condițiile la limită

$$w(0) = (dw/dx)_{x=0} = 0,\ w(l) = f\ , \tag{2.7.142}$$

deci din nou o problemă de funcții şi valori proprii.

Soluție. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$w = A\sin\beta x + B\cos\beta x + f\left(1-\frac{cl}{P}\right)+\frac{cf}{P}x\,. \tag{2.7.143}$$

Condițiile inițiale (de la marginea inferioară) conduc la

$$A = -f\left(1-\frac{cl}{\beta^2 EI}\right),\ B=\frac{cl}{\beta^3 EI}\,, \tag{2.7.144}$$

astfel încât pentru fibra medie rezultă expresia

$$w(x) = f\left[\left(1-\frac{cl}{\beta^2 EI}\right)(1-\cos\beta x)+\frac{c}{\beta^2 EI}\left(x-\frac{1}{\beta}\sin\beta x\right)\right]. \tag{2.7.145}$$

Condiția $w(l)=f$ duce la ecuația caracteristică

$$\left(1-\frac{cl}{\beta^2 EI}\right)(1-\cos\beta l)+\frac{c}{\beta^2 EI}\left(l-\frac{1}{\beta}\sin\beta l\right)=1\,, \tag{2.7.146}$$

care se mai poate scrie

$$\beta l - k(\beta l)^3 = \tan\beta l\,, \tag{2.7.147}$$

unde

$$k=\frac{EI}{cl^3}\,. \tag{2.7.148}$$

Pentru o bară de secțiune circulară de diametru d şi datele numerice $E=2.1\cdot10^6\ \text{daN/cm}^2$, $l=2\text{m}$, $c=5\,\text{daN/cm}$, $d=4\text{cm}$, obținem

$$k=\frac{2.1\cdot10^6\cdot\dfrac{\pi\cdot4^4}{64}}{500\cdot200^3}=0.659734457\,.$$

Tabelul 2.7.1.Valorile lui k în funcție de βl

βl	k	βl	k
$\pi/2$	$+\infty$	2.05	0.461347
1.60	8.748177	2.10	0.411386
1.65	3.172054	2.15	0.370179
1.70	1.912600	2.20	0.335633
1.75	1.356572	2.25	0.306272
1.80	1.043598	2.30	0.281024
1.85	0.843079	2.35	0.259092
1.90	0.703761	2.40	0.239874
1.95	0.601423	2.45	0.222901

Pentru această valoare a constatei *k*, rădăcina minimă a ecuației (2.7.147) este

$$\beta l = 1.9197825 .$$

Forța critică devine

$$P_{cr} = 1.9197825^2 \frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(1.6364l)^2} ,$$

unde a fost pusă în evidență şi lungimea de flambaj $l_f = 1.6364l$.

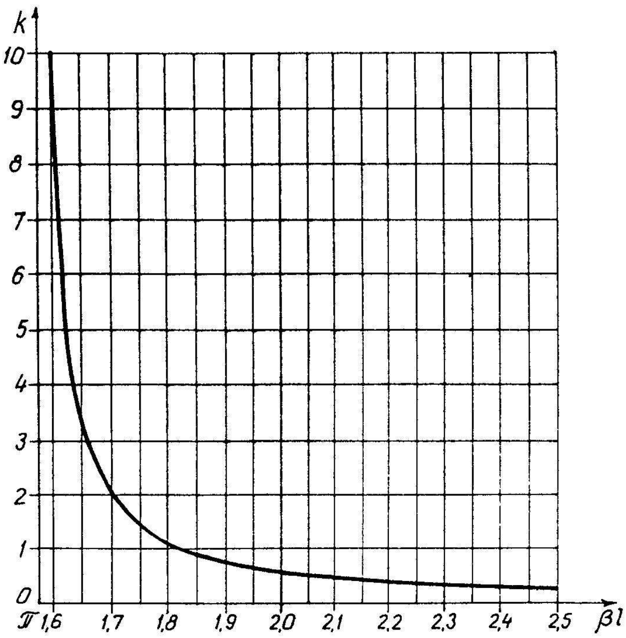


Figura 2.7.22. Graficul funcției $k = f(\beta l)$.

În cazul altor date numerice, în tabelul 2.7.1 au fost date valorile lui k pentru diferite valori βl (vezi relația (2.7.148)):

$$k = f(\beta l) = \frac{\beta l - \tan\beta l}{(\beta l)^3} = \frac{1}{(\beta l)^2}\left(1 - \frac{\tan\beta l}{\beta l}\right) \tag{2.7.149}$$

Graficul funcției $k = f(\beta l)$ este redat în figura 2.7.22. Atât tabelul 2.7.1, cât şi figura 2.7.22 pot servi la determinarea rădăcinii βl pentru un k dat.

Aplicația 2.7.12 (M.V.Soare **[**19,20**]**)

Problema fizică. Să se studieze flambajul unei grinzi drepte într-un mediu elastic, în cazul general de rezemare, în ipotezele lui Winkler ($p = kw$, compresiunea p este proporțională cu deplasarea w, $k = const$ fiind coeficientul reacției solului),

Model matematic. Ecuația diferențială care guvernează deformarea grinzii este

$$\frac{d^4 w}{d\varphi^4} + 4\beta^2 w = 0, \tag{2.7.150}$$

unde parametrul β depinde de elasticitatea mediului.

Soluție. Ecuația este lineară şi cu coeficienți constanți (vezi §2.4). Căutând soluții sub forma exponențială $e^{\beta x}$, se obține ecuația caracteristică

$$\lambda^4 + 4\beta^2 = 0,$$

cu rădăcinile complex conjugate $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = (\pm 1 \pm i)\beta$. Soluția generală poate fi exprimată în una din următoarele forme:

$$\begin{aligned} w = A_1 \cosh\beta x \cos\beta x + A_2 \sinh\beta x \cos\beta x \\ + A_3 \cosh\beta x \sin\beta x + A_4 \sinh\beta x \sin\beta x, \end{aligned} \tag{2.7.151}$$

$$w = e^{-\beta x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) + e^{\beta x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x), \tag{2.7.152}$$

în care A_1, A_2, A_3, A_4, respectiv A, B, C, D, sunt constante de integrare.

Plecând de la formularea (2.7.151), vom schimba constantele de integrare, introducând altele noi, care au o semnificație fizică (parametri inițiali): w_0, φ_0, M_0, T_0, reprezentând săgeata, rotirea, momentul încovoietor şi forța tăietoare la capătul din stânga al grinzii (ales ca origine a *x*-ilor).

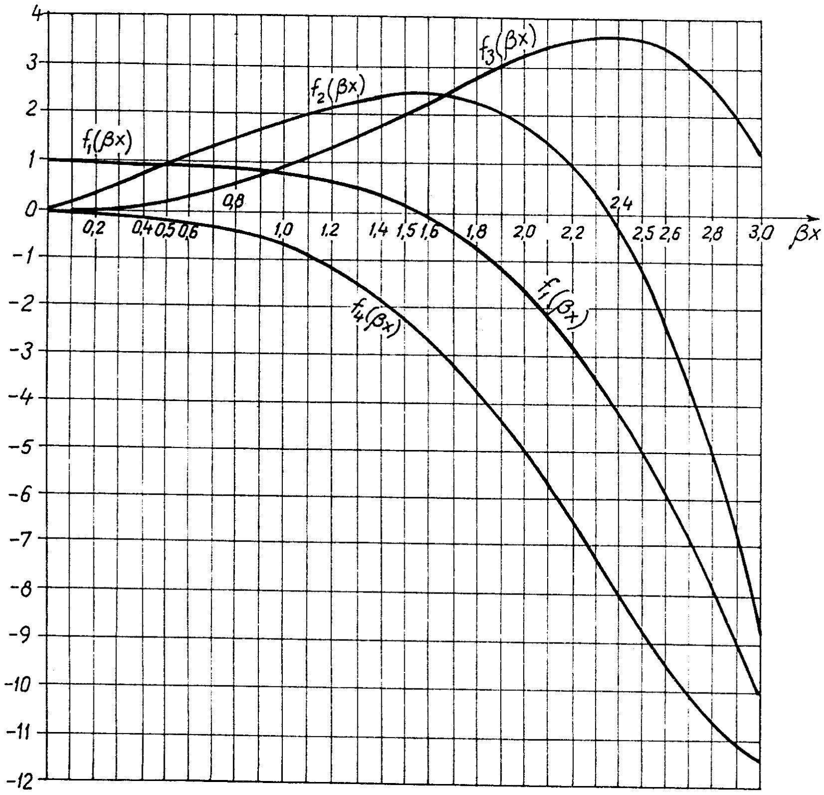


Figura 2.7.23. Graficele funcțiilor $f_i(\beta x)$, $i = 1, 2, 3, 4$

Dacă se notează funcțiile

$$
\begin{aligned}
f_1(\beta x) &= \cosh \beta x \cos \beta x,\\
f_2(\beta x) &= \sinh \beta x \cos \beta x + \cosh \beta x \sin \beta x,\\
f_3(\beta x) &= \sinh \beta x \sin \beta x,\\
f_4(\beta x) &= \sinh \beta x \cos \beta x - \cosh \beta x \sin \beta x,
\end{aligned}
\tag{2.7.153}
$$

expresiile săgeții, rotirii, momentului încovoietor şi forței tăietoare se scriu:

$$
\begin{aligned}
&w = w_0 f_1(\beta x) + \frac{\varphi_0}{2\beta} f_2(\beta x) - \frac{2M_0\beta^2}{k} f_3(\beta x) + \frac{T_0\beta}{k} f_4(\beta x),\\
&\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \beta w_0 f_4(\beta x) + \varphi_0 f_1(\beta x) - \frac{2M_0\beta^3}{k} f_2(\beta x) + \frac{2T_0\beta^2}{k} f_3(\beta x),\\
&M = -EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{kw_0}{2\beta^2} f_3(\beta x) - \frac{k\varphi_0}{4\beta^3} f_4(\beta x) + M_0 f_1(\beta x) + \frac{T_0}{2\beta} f_2(\beta x),\\
&T = -EI\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = \frac{kw_0}{2\beta} f_2(\beta x) + \frac{k\varphi_0}{2\beta^2} f_3(\beta x) + \beta M_0 f_4(\beta x) + T_0 f_1(\beta x).
\end{aligned}
\tag{2.7.154}
$$

Observație. Funcțiile $f_i(\beta x), i = 1, 2, 3, 4$ definite de (2.7.153) au o largă răspândire în mecanica construcțiilor. Graficele lor sunt redate în figura 2.7.23.

Aplicația 2.7.13 (M.V.Soare [19,20])

Problema fizică. O grindă de lungime foarte mare (teoretic infinită) reazemă pe un mediu elastic şi este încărcată cu forța transversală *P*. se cere să se determine expresia săgeții *w*, rotirii φ, momentului încovoietor *M* şi forței tăietoare *T* într-o secțiune curentă, apoi să se reprezinte grafic.

Model matematic. Grinda fiind infinită, originea axelor poate fi aleasă în orice punct; va fi avantajos să o alegem în punctul de aplicare a forței concentrate, pentru a profita de condițiile de simetrie şi antisimetrie (figura 2.7.24). La aplicația precedentă (aplicația 2.7.12), s-a găsit expresia generală a săgeții

$$
w = \mathrm{e}^{-\beta x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) + \mathrm{e}^{\beta x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x), \tag{2.7.155}
$$

unde β este o constantă dată de $\beta^4 = k/4EI$, k fiind coeficientul de tasare al mediului elastic şi *EI* – rigiditatea la încovoiere a grinzii.

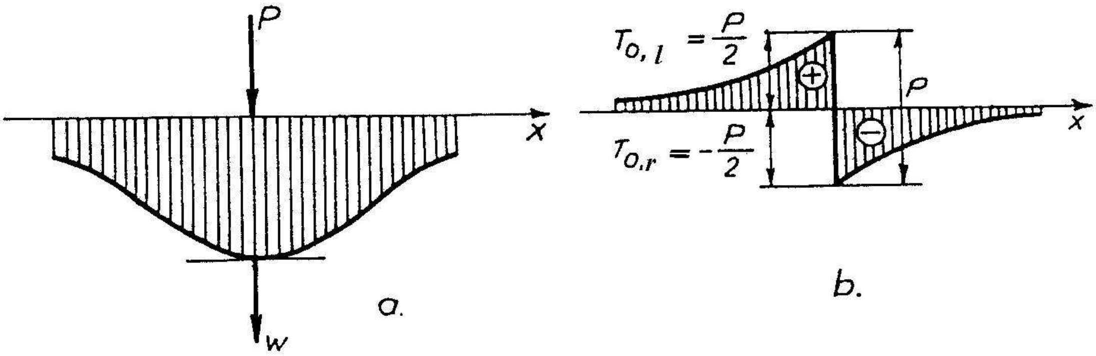


Figura 2. 7.24. Grinda pe mediu elastic, de lungime infinită: a) diagrama săgeților; b) diagrama forțelor tăietoare în vecinătatea originii

Soluție. În origine vom avea $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x = 0$, iar forța tăietoare are un salt; la dreapta, $T_{\mathrm{r}} = -P/2$ (figura 2.7.24, b). La infinit, unde efectul forței exterioare nu se mai resimte, putem exprima că orice triplet de mărimi w, M şi T tinde la zero. Com factorul $\mathrm{e}^{\beta x}$ creşte nedefinit când $x \to \infty$, va trebui să luăm $C = D = 0$. Rămân astfel expresiile

$$\begin{aligned} w &= \mathrm{e}^{-\beta x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \\ \varphi &= \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}[(B-A)\cos\beta x - (A+B)\sin\beta x], \\ M &= -EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = 2\beta^2 EI\mathrm{e}^{-\beta x}(B\cos\beta x - A\sin\beta x), \\ T &= -EI\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = -2\beta^3 EI\mathrm{e}^{-\beta x}[(A+B)\cos\beta x - (B-A)\sin\beta x]. \end{aligned} \tag{2.7.156}$$

Introducând condițiile la limită precedente, rezultă $A = B = P\beta/2k$. Cu aceasta, expresiile (2.7.156) devin

$$\begin{aligned} w &= \frac{P\beta}{2k}\mathrm{e}^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x), \qquad & \varphi &= -\frac{P\beta^2}{k}\mathrm{e}^{-\beta x}\sin\beta x, \\ M &= \frac{P}{4\beta}\mathrm{e}^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x), \qquad & T &= -\frac{P}{2}\mathrm{e}^{-\beta x}\cos\beta x \quad \text{pentru } x \ge 0. \end{aligned} \tag{2.7.157}$$

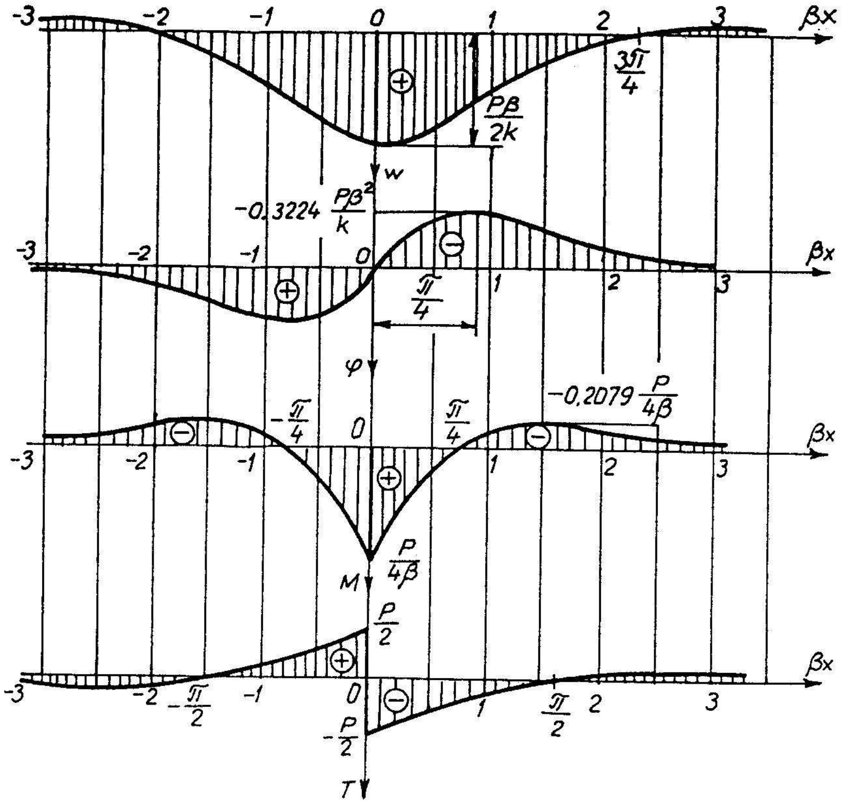


Figura 2.7.25. Graficele funcțiilor w, φ, M, T

Se observă că în formulele (2.7.157) apar patru funcții de argument βx, numite funcții exponențiale amortizate

$$\begin{aligned}
&\psi_1(\beta x) = \mathrm{e}^{-\beta x}\cos\beta x,\\
&\psi_2(\beta x) = \mathrm{e}^{-\beta x}\sin\beta x,\\
&\psi_3(\beta x) = \mathrm{e}^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) = \psi_1(\beta x) + \psi_2(\beta x),\\
&\psi_4(\beta x) = \mathrm{e}^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) = \psi_1(\beta x) - \psi_2(\beta x).
\end{aligned} \tag{2.7.158}$$

Observație. Funcțiile $\psi_i(\beta x), i = \overline{1,4}$, au și ele o largă răspândire în mecanica construcțiilor. Graficele lor sunt redate în figura 2.7.25.

Aplicația 2.7.14 (M.V.Soare [19,20])

Problema fizică. O particulă electrizată intră intr-un câmp electromagnetic de intensitate **E** şi inducție **B**. Se cere să se determine traiectoria particulei.

Model matematic. Componentele celor două forțe față de un triedru ortpgonal de referință *Oxyz* sunt reprezentate în figura 2.7.26. Forța rezultantă este $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, unde q este sarcina electrică, iar al doilea termen este forța Lorenz.

Avem încă

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = v_y B\mathbf{i} - v_x B\mathbf{j}, \tag{2.7.159}$$

cu

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}\,; \tag{2.7.160}$$

pentru studiul mişcării, introducem legea lui Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}, \tag{2.7.161}$$

unde m este masa particulei.

Soluție. Proiectând pe cele trei axe de coordonate se obțin ecuațiile de echilibru dinamic

$$m\ddot{x} = qv_y B, \tag{2.7.162}$$

$$m\ddot{y} = qE_y - qv_x B, \tag{2.7.163}$$

$$m\ddot{z} = qE_z. \tag{2.7.164}$$

Ultima ecuație poate fi considerată separat. Integrând o dată, obținem

$$\dot{z} = \int \frac{qE_z}{m}\,\mathrm{d}t = \frac{qE_z}{m}t + C_1.$$

Constanta C_1 se determină din condiția inițială $\dot{z}(0) = v_z^0$. Rezultă $C_1 = v_z^0$ şi

$$\dot{z} = \frac{qE_z}{m} t + v_z^0 .$$

O nouă integrare dă

$$z = \frac{qE_z}{2m} t^2 + v_z^0 t + C_2 .$$

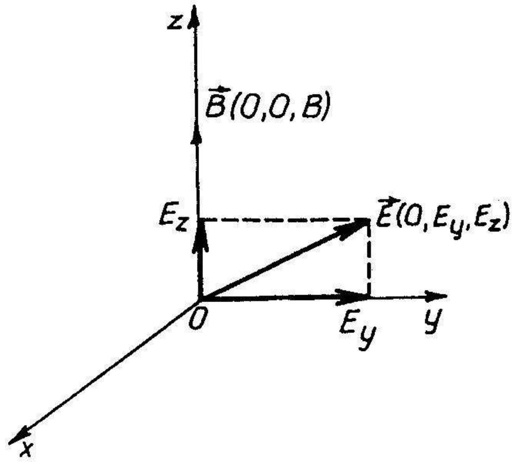


Figura 2.7.26. Particula electrizată într-un câmp electromagnetic.

Condiția $z(0) = 0$ implică $C_2 = 0$, astfel încât

$$z = \frac{qE_z}{2m} t^2 + v_z^0 t \tag{2.7.165}$$

reprezintă o mişcare uniform accelerată în lungul axei *Oz*, de accelerație $a_z = qE_z / m$.

Pentru celelalte două axe, ținând seama de (2.7.160), ecuațiile (2.7.162) şi (2.7.163) se scriu

$$m\,\ddot{x} = qB\dot{y},\ m\,\ddot{y} = qB - qB\dot{x} . \tag{2.7.166}$$

Eliminând funcția *y*, din prima ecuație şi introducând-o în cea de a doua, deducem

$$\ddot{x} + \frac{q^2 B^2}{m^2}\dot{x} = \frac{q^2 B E_y}{m^2} , \tag{2.7.167}$$

deci o ecuație diferențială ordinară de ordinul III, lineară şi neomogenă, cu coeficienți constanți (vezi §2.4). Raportul q/m reprezintă sarcina electrică a unității de masă.

Cu notațiile

$$\frac{q^2 B^2}{m^2} = \omega^2, \frac{q^2 B E_y}{m^2} = R^2, \tag{2.7.168}$$

ecuația (2.7.167) devine

$$\dddot{x} + \omega^2 \dot{x} = R^2. \tag{2.7.169}$$

Cum termenul liber este o constantă, găsim uşor o soluție particulară a acestei ecuații

$$x_p = E_y t / B.$$

Pentru ecuația omogenă asociată $\dddot{x} + \omega^2 \dot{x} = 0$ se caută soluția sub forma exponențială $x = e^{\lambda t}$ şi rezultă ecuația caracteristică

$$\lambda^3 + \omega^2 \lambda = \lambda(\lambda^2 + \omega^2) = 0,$$

cu trei rădăcini, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2, \lambda_3 = \pm i\omega$. Soluția generală a ecuației omogene asociate este deci

$$x_h = D_1 + D_2 \cos \omega t + D_3 \sin \omega t.$$

În final, soluția generală a ecuației neomogene (2.7.167) sau, echivalent, (2.7.169), este

$$x = D_1 + D_2 \cos \omega t + D_3 \sin \omega t + \frac{E_y}{B} t. \tag{2.7.170}$$

Din prima ecuație (2.7.166) rezultă *y*, anume

$$y = \frac{m}{qB} \dot{x} + \text{const} = \frac{m}{qB} \left(\frac{E_y}{B} - D_2 \omega \sin \omega t + D_3 \omega \cos \omega t \right) + \text{const}$$

adică

$$y = \frac{m\omega}{qB}\left(-D_2 \sin \omega t + D_3 \cos \omega t\right) + \text{const}. \tag{2.7.171}$$

Cele patru constante de integrare se determină din condițiile inițiale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_x^0$, $\dot{y}(0) = v_y^0$. Se găsesc pentru ele următoarele expresii

$$D_1 = \frac{qBv_y^0}{m\omega^2},\; D_2 = -\frac{qBv_y^0}{m\omega^2},\; D_3 = \frac{v_x^0}{\omega} - \frac{E_y}{B\omega},\; D_4 = -\frac{mv_x^0}{qB} + \frac{mE_y}{qB^2},$$

astfel încât

$$x = \frac{qBv_y^0}{m\omega^2}\left(1 - \cos \omega t\right) + \frac{E_y}{B\omega}\left(\omega t - \sin \omega t\right) + \frac{v_x^0}{\omega} \sin \omega t,$$
$$y = \frac{mE_y}{qB^2}\left(1 - \cos \omega t\right) + \frac{v_y^0}{\omega} \sin \omega t.$$

Ținând seama de notația (2.7.168), deplasările *x* şi *y* se scriu

$$x = \frac{m}{qB}\left[v_x^0 \sin \omega t + v_y^0\left(1 - \cos \omega t\right) + \frac{E_y}{B}\left(\omega t - \sin \omega t\right)\right],$$
$$y = \frac{m}{qB}\left[v_y^0 \sin \omega t + \frac{E_y}{B}\left(1 - \cos \omega t\right)\right] = \omega \dot{x}.$$

Am obținut astfel ecuațiile parametrice ale proiecției traiectoriei particulei electrizate pe planul *xOy*; curba obținută se numeşte *trohoidă*.

CAPITOLUL 3

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINARE

Forma generală a unui sistem de EDO cu n funcții necunoscute este

$$\begin{aligned} &F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ &F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

unde F_j sunt definiți pe un acelaşi domeniu $(2n+1)$-dimensional şi sunt suficient de regulați.

Dacă ipotezele teoremei funcțiilor implicite sunt satisfăcute (vezi cursul de Analiză Matematică, partea I), atunci y_j' pot fi explicitați din (3.1.1); se obține astfel ***forma canonică/normală*** a unui sistem de EDO de ordinul I:

$$\begin{aligned} &y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Sistemele de forma (3.1.2) pot fi scrise şi în formă compactă. Într-adevăr, utilizând notațiile

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x, \mathbf{y}) \\ f_2(x, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \mathbf{y}) \end{bmatrix}, \tag{3.1.3}$$

sistemul (3.1.2) poate fi scris în forma vectorială

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}). \tag{3.1.4}$$

Să mai observăm că orice ecuație diferențială ordinară de ordinul n

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y''..., y^{(n-1)}\right), \tag{3.1.5}$$

poate fi scrisă sub forma unui sistem de EDO de ordinul I. Cu notațiile

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'',..., y_n = y^{(n-1)}, \tag{3.1.6}$$

ecuația (3.1.5) devine

$$\begin{aligned} &y_1' = y_2, \\ &y_2' = y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_{n-1}' = y_n, \\ &y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

care este un sistem de EDO de ordinul I, în n funcții necunoscute.

Se poate demonstra că, invers, un sistem de EDO de ordinul I de formă canonică poate fi redus la o EDO de ordinul n, în anumite condiții de regularitate.

3.1. SISTEME DE EDO DE ORDINUL I, LINEARE

Forma canonică a unui ***sistem neomogen*** de EDO lineare de ordinul I, în n funcții necunoscute, este

$$\begin{aligned} &y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ &y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

unde $f_i, a_{ij}, i, j = \overline{1,n}$, sunt funcții considerate de clasă $\mathrm{C}^0(I), I \equiv [a,b] \in \Re$ iar $y_j, j = \overline{1,n}$, sunt funcțiile necunoscute.

Lucrăm într-un cadru clasic, deci vom căuta soluții cel puțin netede, adică de clasă $\mathrm{C}^1(I)$.

Dacă f_i se anulează identic pe *I*, obținem ***sistemul omogen*** asociat

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n\,, \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n\,. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Pentru simplificarea scrierii şi, de asemenea, pentru a pune în evidență unele aspecte utile în aplicații, vom introduce următoarele funcții vectoriale:

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \tag{3.1.10}$$

precum şi matricea asociată lui sistemului (3.1.8) sau (3.1.9):

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}. \tag{3.1.11}$$

Cu aceste notații, sistemul neomogen (3.1.9) se scrie sub forma vectorială

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}\,, \tag{3.1.12}$$

iar sistemul omogen asociat (3.1.10) ia forma

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}\,. \tag{3.1.13}$$

Un prim rezultat important, care este o consecință directă a linearității, afirmă că orice combinație liniară de soluții ale sistemului omogen (3.1.13) este de asemenea o soluție a sistemului.

Teorema 3.1. *Fie* $\mathbf{A}(x)$ *o matrice* $n\times n$, *funcție continuă de x. Dacă* $\mathbf{y}_1(x)$ *şi* $\mathbf{y}_2(x)$ *sunt două soluții ale sistemului omogen* (3.1.13), *atunci*

$$C_1\mathbf{y}_1(x)+C_2\mathbf{y}_2(x),\quad C_1, C_2\in\Re,$$

este de asemenea o soluție a sistemului.

Al doilea rezultat afirmă că soluția generală a sistemului neomogen (3.1.12) se obține ca suma dintre o soluție particulară a lui (3.1.12) şi soluția generală a sistemului omogen (3.1.13).

Teorema 3.2. *Fie* $\mathbf{A}(x)$ *o matrice* $n\times n$ *și* $\mathbf{f}$ *funcții continue de x. Notăm cu* $\mathbf{y}_p$ *o soluție particulară a sistemului neomogen* (3.1.12). *Atunci* $\mathbf{y}(x)$ *este soluția generală a sistemului* (3.1.12) *dacă și numai dacă* $\mathbf{y}(x)=\mathbf{y}_p(x)+\mathbf{y}_o(x)$, *unde* $\mathbf{y}_o$ *este soluția sistemului omogen* (3.1.13).

<u>Demonstrație</u>. Observăm că

$$\mathbf{y}'_p(x)+\mathbf{y}'_o(x)=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}_p(x)+\mathbf{f}(x)+\mathbf{A}(x)\mathbf{y}_o(x)=$$
$$=\mathbf{A}(x)\left(\mathbf{y}_p(x)+\mathbf{y}_o(x)\right)+\mathbf{f}(x).$$

Reciproc, dacă $\mathbf{y}(x)=\mathbf{y}_p(x)+\mathbf{y}_o(x)$ este soluția sistemului neomogen, atunci

$$\mathbf{y}'(x)-\mathbf{y}'_p(x)=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)+\mathbf{f}(x)-\mathbf{A}(x)\mathbf{y}_p(x)-\mathbf{f}(x)=$$
$$=\mathbf{A}(x)\left(\mathbf{y}(x)-\mathbf{y}_p(x)\right),$$

adică $\mathbf{y}(x)-\mathbf{y}_p(x)$ este soluția sistemului omogen.

3.2. SISTEME DE EDO DE ORDINUL I LINEARE, CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Teoremele generale 3.1 şi 3.2 nu descriu modalitatea de determinare explicită a soluțiilor sistemelor lineare, omogene sau neomogene. Vom vedea, în cele ce urmează, că putem obține soluții explicite dacă matricea **A** este constantă (nu depinde de x).

Forma generală a unui sistem linear de ordinul I, cu coeficienți constanți este

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ .... \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{3.2.1}$$

unde $f_j \in C^0(\mathrm{I}), \mathrm{I} \subseteq \Re, j = \overline{1,n}, \quad a_{ij} \in \Re, i, j = \overline{1,n}$.

Cu notațiile (3.1.10), ***sistemul neomogen*** (3.2.1) se scrie vectorial astfel:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{Ay} + \mathbf{f}\ , \tag{3.2.2}$$

unde matricea constantă **A** este dată de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.2.3}$$

La fel ca mai sus, pentru $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, obținem ***sistemul linear omogen asociat***

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{Ay}\ . \tag{3.2.4}$$

Pentru rezolvarea sistemului (3.2.4) căutăm soluții de forma

$$\mathbf{y} = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = (c_1, \quad c_2, \quad c_3, ... \quad c_n)^{\mathrm{T}}, \quad c_j \in \Re/\mathcal{C}, j = \overline{1,n}. \tag{3.2.5}$$

Derivând în raport cu x, obținem

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}\mathbf{C}. \tag{3.2.6}$$

Înlocuind în , obținem

$$\alpha \mathrm{e}^{\alpha x}\mathbf{C} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{3.2.7}$$

Simplificăm cu $\mathrm{e}^{\alpha x}$ şi notăm cu **E** matricea unitate:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} \in \mathfrak{M}_{n\times n}. \tag{3.2.8}$$

Obținem relația

$$(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})\mathbf{C} = \mathbf{0}, \tag{3.2.9}$$

unde **0** este vectorul identic nul, cu n componente.

Dacă sistemul (3.2.4) admite soluții de forma (3.2.5), atunci

- α este ***valoare proprie*** a matricei **A** a sistemului, iar
- **C** este ***vectorul propriu corespunzător***.

Condiția (3.2.9) reprezintă, de fapt, un sistem algebric linear şi omogen de n ecuații, cu n necunoscute, $c_1, c_2, ..., c_n$, scris matriceal.

Problema rezolvării sistemului diferențial omogen (3.2.4) se reduce astfel la determinarea vectorilor şi valorilor proprii ale matricei asociate.

Pentru ca (3.2.9) să admită soluții care să nu fie identic nule, trebuie ca

$$\det(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E}) = 0, \tag{3.2.10}$$

adică, mai explicit,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.2.11}$$

Condiția (3.2.10), sau, echivalent, (3.2.11), reprezintă o ecuație algebrică polinomială, care se numeşte ***ecuație caracteristică***.

De soluțiile ei depinde forma soluției sistemului de EDO (3.2.4).

Pentru exemplificare, vom considera cazul $n=3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3. \end{cases} \tag{3.2.12}$$

Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\alpha \end{vmatrix} = 0, \tag{3.2.13}$$

şi are trei rădăcini, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Distingem trei cazuri:

A. ***Cazul rădăcinilor reale şi distincte***

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Re$ distincte. Atunci este valabilă schema

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathrm{e}^{\alpha_1 x} & \mathrm{e}^{\alpha_2 x} & \mathrm{e}^{\alpha_3 x} \end{matrix}. \tag{3.2.14}$$

Fie $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ vectorii proprii corespunzători lui $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Rezultă, conform celor spuse anterior, că $\left\{\mathrm{e}^{\alpha_1 x}\mathbf{C}_1, \mathrm{e}^{\alpha_2 x}\mathbf{C}_2, \mathrm{e}^{\alpha_3 x}\mathbf{C}_3\right\}$ formează un sistem fundamental de soluții.

Soluția generală a sistemului (3.2.12) este deci

$$\mathbf{y}(x)=k_1\mathbf{C}_1\cdot e^{\alpha_1 x}+k_2\mathbf{C}_2\cdot e^{\alpha_2 x}+k_3\mathbf{C}_3\cdot e^{\alpha_3 x}, \tag{3.2.15}$$

unde k_1, k_2, k_3 sunt constante arbitrare.

B. *Cazul rădăcinilor complexe*

Dacă ecuația admite o soluție complexă, întrucât ea are coeficienți reali, va admite și conjugata ca soluție. Fie deci $\alpha_1=\alpha+i\beta$, $\alpha_2=\alpha-i\beta$, rădăcini complexe conjugate, și $\alpha_3\in\Re$.

Fie $\mathbf{C}+i\mathbf{D}$ vectorul propriu asociat lui $\alpha_1=\alpha+i\beta$. Atunci $\mathbf{C}-i\mathbf{D}$ este vectorul propriu pentru $\alpha_2=\alpha-i\beta$ (vezi cursul de Algebră). În loc să considerăm funcțiile complexe care rezultă direct, vom lua combinațiile lineare ale acestora.

Deci

$$\begin{array}{ccc} \alpha+i\beta & \alpha-i\beta & \alpha_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\mathbf{C}+i\mathbf{D})e^{(\alpha+i\beta)x} & (\mathbf{C}-i\mathbf{D})e^{(\alpha-i\beta)x} & e^{\alpha_3 x}\mathbf{C}_3 \end{array} \tag{3.2.16}$$

Atunci semisuma $\mathbf{y}_1$ a primelor două soluții este de asemenea soluție a sistemului, deoarece acesta este linear. Avem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \frac{1}{2}\left[(\mathbf{C}+i\mathbf{D})e^{(\alpha+i\beta)x}+(\mathbf{C}-i\mathbf{D})e^{(\alpha-i\beta)x}\right]= \\ &= e^{\alpha x}\left[\mathbf{C}\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+i\mathbf{D}\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2}\right]= \\ &= e^{\alpha x}\left[\mathbf{C}\underbrace{\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}}_{\cos\beta x}-\mathbf{D}\underbrace{\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}}_{\sin\beta x}\right], \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

de unde

$$\mathbf{y}_1 = e^{\alpha x}(\mathbf{C}\cos\beta x - \mathbf{D}\sin\beta x). \tag{3.2.18}$$

Aceasta este, de fapt, partea reală a lui $(\mathbf{C} + i\mathbf{D})e^{(\alpha + i\beta)x}$.

Obținem o altă soluție reală $\mathbf{y}_2$ scăzând primele două soluții din (3.2.16) şi împărțind această diferență la 2i:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_2 &= \frac{1}{2i}\left[(\mathbf{C} + i\mathbf{D})e^{(\alpha+i\beta)x} - (\mathbf{C} - i\mathbf{D})e^{(\alpha-i\beta)x}\right] = \\ &= e^{\alpha x}\left[\mathbf{C}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} + i\mathbf{D}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2i}\right] = \\ &= e^{\alpha x}\left[\mathbf{C}\underbrace{\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}}_{\sin\beta x} + \mathbf{D}\underbrace{\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}}_{\cos\beta x}\right],\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

deci

$$\mathbf{y}_2 = e^{\alpha x}(\mathbf{C}\sin\beta x + \mathbf{D}\cos\beta x), \tag{3.2.20}$$

care este partea imaginară a lui $(\mathbf{C} + i\mathbf{D})e^{(\alpha + i\beta)x}$.

În final, soluția generală a sistemului (3.2.12) se scrie în acest caz

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= k_1 e^{\alpha x}(\mathbf{C}\cos\beta x - \mathbf{D}\sin\beta x) + k_2 e^{\alpha x}(\mathbf{C}\sin\beta x + \mathbf{D}\cos\beta x) + \\ &+ k_3 e^{\alpha_3 x}\mathbf{C}_3.\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

C. *Cazul rădăcinilor multiple*

Dacă ecuația admite o rădăcină dublă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, cea de a treia fiind diferită de ea, adică $\alpha_3 \neq \alpha$, atunci schema sistemului fundamental

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \alpha & \alpha_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ e^{\alpha x}\mathbf{C} & ? & e^{\alpha_3 x}\mathbf{C}_3 \end{array} \tag{3.2.22}$$

este, deocamdată, incompletă.

În diagrama de mai sus, $\mathbf{C}$ şi $\mathbf{C}_3$ sunt vectorii proprii corespunzători lui α, respectiv α_3. Mai este necesar un element pentru sistemul fundamental. Ca şi în cazul similar al EDO lineare a căror ecuație caracteristică admite rădăcini multiple, căutăm soluții de forma

$$\mathbf{y} = x\mathbf{C}\mathrm{e}^{\alpha x} + \mathbf{D}\mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{3.2.23}$$

Înlocuim în (3.2.12) şi determinăm pe $\mathbf{D}$ din sistemul algebric ce se obține după simplificarea cu $\mathrm{e}^{\alpha x}$. Soluția generală a sistemului (3.2.12) este

$$\mathbf{y} = k_1\mathbf{C}\mathrm{e}^{\alpha x} + k_2(\mathbf{C}x + \mathbf{D})\mathrm{e}^{\alpha x} + k_3\mathbf{C}_3\mathrm{e}^{\alpha_3 x}. \tag{3.2.24}$$

Exemple

1. Pentru cazul A). Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y. \end{cases} \tag{3.2.25}$$

Soluție. Este un sistem de ecuații diferențiale linear şi omogen. Matricea asociată sistemului este

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.26}$$

Notând cu $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ vectorul funcțiilor necunoscute şi cu $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$ vectorul derivatelor lor, scriem sistemul sub formă matriceală

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{3.2.27}$$

Căutând soluții de forma $\mathrm{e}^{\alpha x}\mathbf{C}$, ajungem la ecuația caracteristică

$$\det(\mathbf{A}-\alpha\mathbf{E}) \equiv \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 = 0, \tag{3.2.28}$$

ale cărei soluții sunt reale şi distincte: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$.

Vectorii proprii sunt

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.29}$$

Deci

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \tag{3.2.30}$$

formează o bază (sistem fundamental de soluții) pentru sistemul (3.2.25). Soluția sa generală este

$$\mathbf{y}(x) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}, \tag{3.2.31}$$

sau, pe componente,

$$\begin{cases} y(x) = k_1 \mathrm{e}^{x} + k_2 \mathrm{e}^{-x} \\ z(x) = k_1 \mathrm{e}^{x} - k_2 \mathrm{e}^{-x} \end{cases}, \quad k_1, k_2 \in \Re, \text{ arbitrare.} \tag{3.2.32}$$

2. Pentru cazul B). Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -y. \end{cases} \tag{3.2.33}$$

Soluție. Matricea asociată sistemului este

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.34}$$

şi, utilizând aceleaşi notații ca în exercițiul precedent, obținem forma matriceală a sistemului:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{3.2.35}$$

Ecuația caracteristică

$$\det(A - \alpha E) \equiv \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 = 0 \tag{3.2.36}$$

are rădăcinile pur imaginare: $\alpha_1 = \mathrm{i}, \quad \alpha_2 = -\mathrm{i}$.

Vectorii proprii corespunzători sunt complex conjugați

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{3.2.37}$$

Rezultă sistemul fundamental

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad \overline{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}. \tag{3.2.38}$$

Calculăm semisuma soluțiilor şi semidiferența împărțită la i. Obținem

$$\begin{gathered} \mathbf{y}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{Y} + \overline{\mathbf{Y}}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{Y} - \overline{\mathbf{Y}}}{2\mathrm{i}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \\ \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.2.39}$$

Soluția generală a sistemului (3.2.33) este deci

$$\mathbf{y} = k_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \tag{3.2.40}$$

sau, pe componente

$$\begin{cases} y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x \\ z(x) = -k_1 \sin x + k_2 \cos x \end{cases}, \quad k_1, k_2 \in \Re, \text{ arbitrare.} \tag{3.2.41}$$

3. Pentru cazul C). Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay + z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = az. \end{cases} \tag{3.2.42}$$

Soluție. Folosind matricea asociată

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \tag{3.2.43}$$

şi aceleaşi notații pentru funcțiile necunoscute şi derivatele lor, scriem sistemul sub forma matriceală

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{3.2.44}$$

Ecuația caracteristică este

$$\det(A - \alpha E) \equiv \begin{vmatrix} a-\alpha & 1 \\ 0 & a-\alpha \end{vmatrix} = (a-\alpha)^2 = 0, \tag{3.2.45}$$

având rădăcina dublă $\alpha_1 = \alpha_2 = a$. Vectorul propriu corespunzător lui a este

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.46}$$

de unde obținem o primă soluție a sistemului fundamental căutat

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{ax}. \tag{3.2.47}$$

Căutăm pe $\mathbf{y}_2$ de forma

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ax} \cdot x + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} e^{ax}. \qquad (3.2.48)$$

Înlocuim în sistem:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ax} + ax \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ax} + a \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} e^{ax} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x e^{ax} + \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} e^{ax}. \qquad (3.2.49)$$

Simplificăm cu e^{ax} şi rezultă

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad_1 \\ ad_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad_1 + d_2 \\ ad_2 \end{pmatrix}, \qquad (3.2.50)$$

de unde obținem $d_2 = 1$, d_1 fiind arbitrar. Putem lua $d_1 = 0$. Astfel, cea de a doua soluție a sistemului fundamental este

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ax} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ax}, \qquad (3.2.51)$$

sau

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^{ax}. \qquad (3.2.52)$$

Soluția generală a sistemului (3.2.42) este

$$\mathbf{y} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ax} + k_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^{ax}, \qquad (3.2.53)$$

sau, pe componente

$$\begin{cases} y(x) = (k_1 + k_2 x) e^{ax} \\ z(x) = k_2 e^{ax} \end{cases}, \quad k_1, k_2 \in \Re, \text{ arbitrare.} \qquad (3.2.54)$$

Observații

1. Constantele arbitrare din soluția generală a sistemului se determină din condiții suplimentare. De multe ori, acestea sunt de tip Cauchy, sau inițiale:

$$y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},...,\ y_n(x_0)=y_{n0}, \tag{3.2.55}$$

sau, altfel scris,

$$\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0, \tag{3.2.56}$$

unde $\mathbf{y}_0=(y_{10},y_{20},...,y_{n0})^{\mathrm{T}}$.

2. Pentru sistemul neomogen (3.2.2) observăm, ca şi în cazul EDO lineare, că soluția generală se scrie ca

$$\mathbf{y}=\mathbf{Y}+\mathbf{y}_{\text{omogen}}, \tag{3.2.57}$$

unde **Y** este o soluție particulară a lui (3.2.2), iar $\mathbf{y}_{\text{omogen}}$ – soluția generală a sistemului omogen asociat. Această observație este valabilă şi pentru sistemul general (3.1.12). Soluția particulară **Y** se caută fie utilizând ***metoda variației constantelor***, valabilă şi în cazul general, fie, ca şi în cazul EDO lineare cu coeficienți constanți, de forma termenului liber.

Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z+\mathrm{e}^{2x}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y. \end{cases} \tag{3.2.58}$$

Soluție. Sistemul omogen asociat este chiar (3.2.25), a cărui soluție generală am găsit-o anterior. Deci

$$\mathbf{y}_{\text{omogen}}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}. \tag{3.2.59}$$

Căutăm o soluție particulară a sistemului neomogen de forma

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}. \tag{3.2.60}$$

Introducem în sistem şi obținem

$$2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}e^{2x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}e^{2x} + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.61}$$

Simplificând cu e^{2x}, deducem sistemul algebric în a, b

$$\begin{aligned} 2a &= b + 1, \\ 2b &= a, \end{aligned} \tag{3.2.62}$$

deci $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$.

Rezultă

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2x}, \tag{3.2.63}$$

astfel încât soluția generală a sistemului neomogen (3.2.58) este

$$\mathbf{y} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2x}. \tag{3.2.64}$$

3.2.1. EXPRIMAREA SOLUȚIEI UNUI SISTEM DE EDO LINEARE FOLOSIND EXPONENȚIALA DE MATRICE

Fie acum $\mathcal{M}_n(\Re)$ spațiul Banach al matricelor $n \times n$ de numere reale înzestrat cu norma

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

pentru $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\Re)$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j \in \{1,2,...,n\}$.

Definiția 3.1. Fie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\Re)$. Suma seriei convergente $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$ se numeşte ***exponențiala*** matricei **A** şi se notează cu $e^{\mathbf{A}}$.

Dacă o matrice **A** are pe diagonală valorile $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ iar restul elementelor sunt egale cu zero, vom scrie $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Proprietățile exponențialei sunt:

a) $\mathrm{e}^{\mathbf{0}_n} = \mathbf{I}_n$, $\mathrm{e}^{\lambda \mathbf{I}_n} = \mathrm{e}^{\lambda}\mathbf{I}_n$, pentru orice $\lambda \in \Re$;

b) dacă $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, atunci $\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \mathrm{e}^{\lambda_2}, ..., \mathrm{e}^{\lambda_n}\right)$;

c) dacă $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, atunci $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathbf{B}} = \mathrm{e}^{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$;

d) pentru orice matrice $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_n(\Re)$ cu determinantul nenul avem

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1};$$

e) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}\right) = \mathbf{A}\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}, \quad t \in \Re$.

Teorema 3.3. *Fie* **A** *o matrice constantă. Sistemul*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{3.2.65}$$

admite o unică soluție dată de expresia

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{e}^{x\mathbf{A}}\mathbf{y}_0. \tag{3.2.66}$$

<u>Demonstrație</u>. Observăm că $\mathrm{e}^{\mathbf{0}_n} = \mathbf{I}_n$ şi

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathrm{e}^{x\mathbf{A}}\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}\mathbf{y}(x).$$

Unicitatea rezultă din teorema Cauchy-Lipschitz.

Sistemul

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{3.2.67}$$

admite ca soluție generală

$$\mathbf{y}(x) = \mathrm{e}^{x\mathbf{A}}\mathbf{C},$$

unde **C** este un vector constant de componente $C_1, C_2, ..., C_n$.

Teorema 3.4. *Fie J un interval din* $\Re$ *care conține punctul* $x=0$, **A** *o matrice* $n\times n$ *constantă şi* **f** *o funcție continuă pe J. Sistemul de EDO neomogen*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{f},\quad \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0, \tag{3.2.68}$$

admite o unică soluție dată de formula

$$\mathbf{y}(x)=\mathrm{e}^{x\mathbf{A}}\mathbf{y}_0+\int_0^x \mathrm{e}^{(x-u)\mathbf{A}}\mathbf{f}(u)du\,. \tag{3.2.69}$$

Demonstrație. Sistemul de EDO omogen

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{A}\mathbf{y},\quad \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0$$

admite soluția unică $\mathbf{G}(x)=\mathrm{e}^{x\mathbf{A}}\mathbf{y}_0$. Soluția sistemului neomogen se caută sub forma $\mathbf{y}(x)=\mathbf{G}(x)\mathbf{c}(x)$. Avem

$$\mathbf{y}'=\mathbf{G}'\mathbf{c}+\mathbf{G}\mathbf{c}'=\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{c}+\mathbf{G}\mathbf{c}'$$
$$\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{f}=\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{c}+\mathbf{f}.$$

Urmează că **c** satisface relația

$$\mathbf{c}'(\mathbf{x})=\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{c}(\mathbf{0})=\mathbf{y}_\mathbf{0},$$

care admite soluția unică

$$\mathbf{c}(x)=\mathbf{y}_0+\int_0^x \mathbf{G}^{-1}(u)\mathbf{f}(u)du.$$

În acest fel,

$$\mathbf{y}(x)=\mathrm{e}^{x\mathbf{A}}\mathbf{y}_0+\int_0^x \mathbf{e}^{(x-u)\mathbf{A}}\mathbf{f}(u)du.$$

În teoremele precedente nu se calculeaza explicit exponențiala, acest lucru fiind dificil, mai ales în cazul sistemelor de dimensiuni mari. Dacă matricea **A** este diagonalizabilă, calculul exponențialei se face simplu.

Teorema 3.5. *Fie* **A** *o matrice* $n\times n$ *constantă, diagonalizabilă. Atunci*

$$e^{x\mathbf{A}}=\mathbf{P}e^{x\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}, \tag{3.2.70}$$

unde **D** *este matricea diagonală ale cărei elemente sunt valorile proprii ale lui* **A** *şi* **P** *este matricea ale cărei coloane sunt vectori proprii ai lui* **A.**

Demonstrație. **A** fiind diagonalizabilă, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}$ şi $\mathbf{A}^n=\mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$ cu $\mathbf{D}^n$ matrice diagonală. Se deduce că $e^{x\mathbf{D}}$ este matrice diagonală cu elementele $e^{x\lambda_1}, e^{x\lambda_2},..., e^{x\lambda_n}$ şi $e^{x\mathbf{A}}=\mathbf{P}e^{x\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}$.

Exemplu

Să se rezolve sistemul $\dfrac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{A}\mathbf{y}$, unde $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$.

Soluție. **A** este diagonalizabilă şi valorile proprii sunt:

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=3$$

cu vectorii proprii

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 6 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 7 & -2\end{pmatrix},$$

$$e^{x\mathbf{A}}=\mathbf{P}e^{x\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}e^{-x} & 5e^{x} & e^{3x}\\ e^{-x} & e^{x} & e^{3x}\\ 4e^{-x} & 6e^{x} & 4e^{3x}\end{pmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului este

$$y_1 = C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{x} + C_3 e^{3x}$$
$$y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{3x}$$
$$y_3 = 4C_1 e^{-x} + 6C_2 e^{x}.$$

Dacă matricea **A** nu este diagonalizabilă, pentru a calcula $e^{x\mathbf{A}}$, se poate folosi următoarea teoremă.

Teorema 3.6. *Fie* **A** *o matrice* $n \times n$ *constantă. Atunci* **A** *are o unică descompunere* $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$, *unde* **S** *este diagonalizabilă*, **N** *este nilpotentă (adică pentru k suficient de mare* $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$*) iar* **S** *și* **N** *comută.*

Deoarece **S** şi **N** comută, deducem că $e^{x\mathbf{A}} = e^{x\mathbf{S}} e^{x\mathbf{N}}$. **S** fiind diagonalizabilă, $e^{x\mathbf{S}}$ se calculează ca mai sus. Pentru $e^{x\mathbf{N}}$ avem:

$$e^{x\mathbf{N}} = \mathbf{I}_n + x\mathbf{N} + ... + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\mathbf{N}^{k-1}.$$

3.3. SISTEME DE ORDINUL I NELINEARE. SISTEME SIMETRICE. INTEGRALE PRIME

Un sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordin superior poate fi transformat intr-un sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordin I prin introducerea de noi funcții ca necunoscute. Fie sistemul de EDO de ordinul doi cu două funcții necunoscute:

$$\begin{cases} y_1'' + 5y_1' - y_2 = \cos 2x, \\ y_2'' - y_1' + 3y_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.3.1)$$

Introducând funcțiile necunoscute auxiliare

$$y_3 = y_1', \quad y_4 = y_2',$$

sistemul se poate reduce la forma:

$$\begin{cases} y_1' = y_3, \\ y_2' = y_4, \\ y_3' + 5y_3 - y_2 = \cos 2x, \\ y_4' - y_3 + 3y_2 = 0. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

unde avem patru ecuații de ordinul întâi şi patru funcții necunoscute.

În cele ce urmează, vom considera sisteme de EDO de ordinul I cu n ecuații şi n funcții necunoscute, sub forma canonică, adică

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Presupunem că sistemul admite o soluție unică care satisface condițiile

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad i = 1, ..., n.$$

Mulțimea

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ .... \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n), \end{cases} \tag{3.3.4}$$

unde $C_1, C_2, ..., C_n$ sunt costante reale, constituie integrala generală a sistemului. Dacă rezolvăm sistemul în raport cu $C_1, C_2, ..., C_n$, atunci integrala generală a sistemului are forma

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_1, \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_2, \\ .... \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_n. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Funcțiile $F_1, F_2, ..., F_n$ care sunt constante în punctele $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ se numesc ***integrale prime*** ale sistemului (3.3.3). Mai general, se numeşte integrală primă a sistemului (3.3.3) orice funcție de $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, care se reduce la o constantă dacă se înlocuiesc $y_1, y_2, ..., y_n$ cu funcții ce constituie o soluție oarecare a sistemului. Se poate demonstra că orice integrală primă a sistemului se poate exprima cu ajutorul funcțiilor $F_1, F_2, ..., F_n$.

Sistemul (3.3.3) se poate scrie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}\, y_1}{f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{\mathrm{d}\, y_2}{f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = ... = \frac{\mathrm{d}\, y_n}{f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{\mathrm{d}\, x}{1}. \tag{3.3.6}$$

De aceea, în continuare, vom considera sisteme de forma

$$\frac{\mathrm{d}\, x_1}{P_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{\mathrm{d}\, x_2}{P_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{\mathrm{d}\, x_n}{P_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \tag{3.3.7}$$

cu x_n variabila independentă şi $x_1 = x_1(x_n), x_2 = x_2(x_n), ..., x_{n-1} = x_{n-1}(x_n)$. Presupunem că funcțiile $P_i(x_1, x_2, ..., x_n),\ i = 1,2,...,n$ nu se anulează simultan într-un domeniu $D \subset R^n$. Un astfel de sistem se numeşte ***sistem simetric.***

Definiția 3.2. Integralele prime distincte $F_1, F_2, ..., F_k$ ale sistemului (3.3.7) se numesc ***independente*** dacă matricea

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right), \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,n}$$

are rangul *k*.

O metodă comodă pentru rezolvarea sistemului (3.3.7) este căutarea unor combinații integrabile. Pentru a găsi o combinație integrabilă, se poate utiliza următoarea proprietate a fracțiilor echivalente: dacă

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = t,$$

atunci, pentru orice $k_1, k_2, ..., k_n$, avem

$$\frac{k_1a_1 + k_2a_2 + ... + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + ... + k_nb_n} = t .$$

Teorema 3.7. *Dacă* $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ *sunt funcții continue pe* $D \subset \Re^n$ *astfel încât:*

a) $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + ... + \mu_n P_n = 0$ *pe* $D \subset \Re^n$*;*

b) $\mu_1 \,\mathrm{d}\, x_1 + \mu_2 \,\mathrm{d}\, x_2 + ... + \mu_n \,\mathrm{d}\, x_n = \mathrm{d}\, F$ pe $D \subset \Re^n$,

atunci $F : D \to R$ *este o integrală primă a sistemului* (3.3.7).

<u>Demonstrație</u>. Fie $x_1 = x_1(x_n),\ x_2 = x_2(x_n),\ ...,\ x_{n-1} = x_{n-1}(x_n)$ o soluție a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}\, x_i}{\mathrm{d}\, x_n} = \frac{P_i}{P_n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Atunci

$$\mathrm{d}\, F(x_1(x_n), x_2(x_n), ..., x_{n-1}(x_n), x_n) = \frac{\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + ... + \mu_n P_n}{P_n} \mathrm{d}\, x_n = 0$$

şi

$$F(x_1(x_n), x_2(x_n), ..., x_{n-1}(x_n), x_n) = C,$$

unde *C* este o constantă. ◘

Exemple

1) Să se rezolve sistemul

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{xz} = \frac{\mathrm{d}\, y}{yz} = \frac{\mathrm{d}\, z}{-xy}.$$

Primele două fracții formează o combinație integrabilă. Prin integrare, din egalitatea

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{x} = \frac{\mathrm{d}\, y}{y},$$

obținem integrala primă $\frac{x}{y} = C_1$.

Din teorema 3.7,

$$\frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{yxz + xyz} = \frac{\mathrm{d}z}{-xy}.$$

Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{2xyz} = \frac{\mathrm{d}z}{-xy},$$

$$\mathrm{d}(xy) = -2z\,\mathrm{d}z$$

şi integrala primă $xy + z^2 = C_2$.

În acest fel, am obținut două integrale prime independente

$$F_1(x, y, z) \equiv \frac{x}{y} = C_1$$

$$F_2(x, y, z) \equiv xy + z^2 = C_2$$

şi sistemul este rezolvat, pentru că

$$y = \frac{x}{C_1}, \quad z^2 = -\frac{x^2}{C_1} + C_2.$$

2) Să considerăm o particulă de masă m şi vector de poziție $\mathbf{r} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, într-un câmp de forțe $\mathbf{F}$ ***conservativ*** ($\mathbf{F} = -\mathrm{grad}V$, unde V este **potențialul scalar** al mişcării). Avem ecuația diferențială în $\mathfrak{R}^3$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}V,$$

sau, pe componente, sistemul

$$(S)\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \\ m\ddot{x}_2 = -\dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \\ m\ddot{x}_3 = -\dfrac{\partial V}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Observăm că

$$m(\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \dot{x}_2\ddot{x}_2 + \dot{x}_3\ddot{x}_3) = -\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 - \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 - \frac{\partial V}{\partial x_3}\dot{x}_3,$$

adică

$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

Fie $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\| = \frac{1}{2}mv^2$ ***energia cinetică*** a particulei de viteză **v**. Atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V,$$

de unde deducem că $T + V = \mathrm{const.}$ Prin urmare $T + V$ este o integrală primă a sistemului *(S)*, numită ***integrala primă a energiei***.

3.4. APLICAȚII ÎN MECANICĂ, FIZICĂ ŞI INGINERIE

Aplicația 3.4.1. Modele de conflict. Modele de tip Lanchester (D. Comănescu, I. Caşu)

Problema fizică. În această aplicație vom prezenta modele matematice pentru evoluția în timp a unui conflict între două tabere. Notăm dimensiunile celor două tabere, la un moment dat, prin $x(t)$ şi $y(t)$ pe care le presupunem numere reale. În funcție de tipul de conflict aceste dimensiuni pot reprezenta număr de soldați, arsenal militar, etc. Modelele matematice prezentate vor fi sisteme diferențiale de ordinul I cu două necunoscute, în care ecuațiile diferențiale componente se scriu pe baza unei ecuații de bilanț de următoarea formă:

$$\dot{x} = -(PC + PO) + R,$$

unde *PC* reprezintă pierderile în conflict ale taberei *x*, *PO* reprezintă pierderile operaționale ale taberei *x* (datorate bolilor, dezertărilor, etc) şi *R* reprezintă reîmprospătarea cu efective a taberei *x*.

4. CONCOM simplificat

Model matematic. Acest model este aplicabil conflictelor convenționale în care pierderile combatante ale fiecărei tabere sunt presupuse a fi direct proporționale cu efectivul taberei adverse. Neglijăm pierderile operaționale şi convenim că nu există reîmprospătarea celor două tabere. Pe baza observațiilor anterioare, modelul matematic este

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay, \\ \dot{y} = -bx, \end{cases}$$

unde a şi b sunt două constante reale strict pozitive. Acest sistem diferențial este liniar şi omogen cu coeficienți constanți. Ştiind efectivele inițiale ale celor două tabere obținem problema Cauchy de evoluție în timp a conflictului

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay, \\ \dot{y} = -bx, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Soluție. Matricea asociată sistemului este

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix},$$

având valorile proprii reale şi distincte $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ab}$ .Vectorii proprii corespunzatori sunt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\dfrac{a}{b}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\dfrac{a}{b}} \end{pmatrix},$$

deci soluția generală a ecuației se scrie astfel:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\dfrac{a}{b}} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\sqrt{ab}t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\dfrac{a}{b}} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{ab}t},$$

unde k_1, k_2 sunt două constante arbitrare. Aplicând condițiile inițiale şi folosind funțiile hiperbolice $\cosh : \Re \to \Re_+$, $\sinh : \Re \to \Re$, date de formulele

$$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2},$$

soluția (unică) a problemei Cauchy de mai sus se poate pune sub forma

$$x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{ab}t\right) + \sqrt{\frac{a}{b}} y_0 \sinh\left(\sqrt{ab}t\right),$$

$$y(t) = -x_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh\left(\sqrt{ab}t\right) + y_0 \cosh\left(\sqrt{ab}t\right).$$

Introducem funcția $L : \Re^2 \to \Re$ dată de relația

$$L(x, y) = bx^2 - ay^2$$

şi arătăm că este *lege de conservare*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(x(t), y(t)) = \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y}(t) = 2bx \cdot (-ay) + (-2ay) \cdot (-bx) \equiv 0.$$

Interpretare fizică. Studiul evoluției în timp a conflictului poate fi făcut fie prin analiza directă a funcțiilor x şi y fie utilizând legea de conservare L. În acest caz vom prefera cea de a doua metodă de studiu. Din considerente de natură practică ne limităm la primul cadran $\{(x, y) \in \Re^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Mulțimea $\mathsf{M}_K = \{(x, y) \in \Re^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, L(x, y) = K\}$ este un fragment de hiperbolă în situația în care $K \neq 0$ şi o semidreaptă ce trece prin origine atunci când $K = 0$. Evoluția în timp a conflictului rămâne în mulțimea M_K ce trece prin datele inițiale ($K = bx_0^2 - ay_0^2$). Pentru valori strict pozitive ale constantei K se obține un fragment de

hiperbolă situat sub semidreapta definită de $K = 0$, iar pentru valori strict negative ale constantei K se obține un fragment de hiperbolă situat deasupra semidreptei definite de $K = 0$. Prin analiza lui x şi y, sau urmărind figura 3.4.1, observăm că pentru $K = 0$ – situația de armistițiu – conflictul nu este câştigat de către niciuna dintre tabere, acestea anulându-şi efectivele simultan. Pentru $K > 0$ conflictul este câştigat de prima tabără x deoarece efectivele celei de-a doua tabere se anulează mai întâi. Pentru $K < 0$ conflictul este câştigat de a doua tabără y.

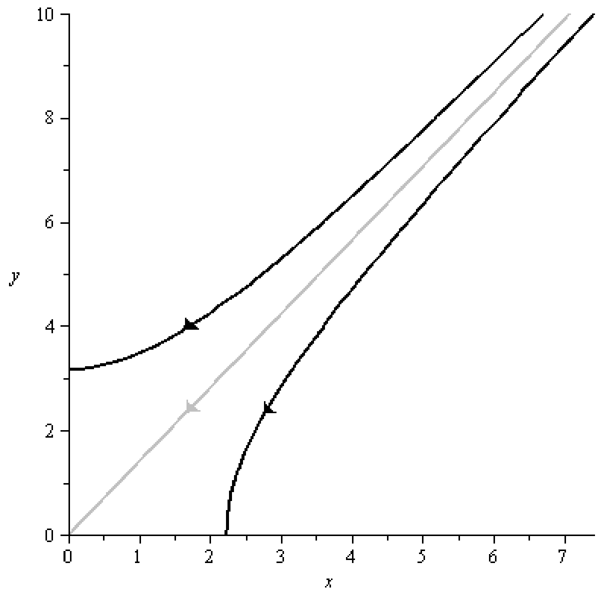


Figura 3.4.1. Evoluția în timp a conflictului în modelul CONCOM

5. GUERCOM simplificat

Model matematic. Acest model este aplicabil conflictelor între două tabere de gherilă în care pierderile combatante ale fiecărei tabere sunt presupuse a fi direct proporționale cu efectivele ambelor tabere. Neglijăm pierderile operaționale şi convenim că nu există reîmprospătarea celor două tabere. Modelul matematic este

$$\begin{cases} \dot{x} = -axy, \\ \dot{y} = -bxy, \end{cases}$$

unde a şi b sunt constante reale strict pozitive. Acesta este un sistem de ecuații diferențiale ordinare neliniar, de ordinul I. Ştiind efectivele inițiale ale celor două tabere obținem problema Cauchy de evoluție în timp a conflictului

$$\begin{cases} \dot{x} = -axy, \\ \dot{y} = -bxy, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Soluție. Introducem funcția $L:\Re^2 \to \Re$ dată de relația

$$L(x, y) = bx - ay$$

şi arătăm că este *lege de conservare*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(x(t), y(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial L}{\partial y}\dot{y}(t) = b \cdot (-axy) + (-a)\cdot(-bxy) \equiv 0 .$$

Utilizăm metoda de reducere a sistemului cu ajutorul legilor de conservare. De-a lungul soluției problemei Cauchy avem (integrala primă)

$$bx(t) - ay(t) = bx_0 - ay_0 \overset{not}{=} K ,$$

de unde exprimăm pe $y(t)$ în funcție de $x(t)$, obținând

$$y(t) = \frac{bx(t) - bx_0 + ay_0}{a} .$$

Înlocuind pe $y(t)$ în prima ecuație obținem problema Cauchy în $x(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = (bx_0 - ay_0)x - bx^2, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Ecuația diferențială de mai sus poate fi tratată fie ca o ecuație cu variabile separabile fie ca o ecuație Bernoulli (vezi cap.1). Împărțind ecuația cu x^2, obținem ecuația lineară şi omogenă în $u = \dfrac{1}{x}$:

$$\dot{u} + (bx_0 - ay_0)u = b .$$

Soluția generală a ecuației omogene asociate este

$$u_{omog}(t) = c\mathrm{e}^{(bx_0 - ay_0)t},$$

unde c este o constantă arbitrară. O soluție particulară a ecuației neomogene este, evident

$$u_p(t) = \frac{b}{bx_0 - ay_0}.$$

Deci soluția generală a ecuației lineare în u este

$$u(t) = c\mathrm{e}^{(bx_0 - ay_0)t} + \frac{b}{bx_0 - ay_0};$$

rezultă că soluția generală a ecuației Bernoulli de mai sus se scrie astfel

$$x(t) = \frac{bx_0 - ay_0}{c(bx_0 - ay_0)\mathrm{e}^{(bx_0 - ay_0)t} + b}$$

Aplicând condiția Cauchy, obținem soluția problemei Cauchy în x

$$x(t) = -\frac{x_0(ay_0 - bx_0)}{bx_0 - ay_0\mathrm{e}^{(bx_0 - ay_0)t}}$$

Înlocuind în expresia lui $y(t)$, obținem

$$y(t) = \frac{y_0(ay_0 - bx_0)}{ay_0 - bx_0\mathrm{e}^{-(bx_0 - ay_0)t}}.$$

Expresiile anterioare nu sunt bine definite pentru $K = 0$. În acestă situație problema Cauchy pentru $x(t)$ devine

$$\begin{cases} \dot{x} = -bx^2, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Aceasta este o ecuație cu variabile separabile. Avem

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2} = -bt,$$

de unde rezultă soluția problemei Cauchy:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + bx_0 t}.$$

Înlocuind în expresia lui $y(t)$, obținem

$$y(t) = \frac{y_0}{1 + bx_0 t}.$$

Interpretare fizică. În această situație, situație de armistițiu, nici una dintre cele două tabere nu câştigă, efectivele ambelor tabere scad, pentru orice moment de timp avem $\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{a}{b}$, iar pentru $t \to \infty$ ambele tind la 0.

În cazul în care $K > 0$ efectivele taberelor combatante scad şi $x \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} x_0 - \frac{a}{b}$, $y \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_0$, conflictul fiind câştigat de tabăra *x*. În cazul în care $K < 0$ efectivele taberelor combatante scad şi $x \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $y \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_0 - \frac{b}{a} x_0$, conflictul fiind câştigat de tabăra *y*.

6. VIETNAM simplificat

Model matematic. Acest model este aplicabil conflictelor între o tabără de gherilă *x* şi o tabără convențională *y*. Pierderile combatante ale taberei de gherilă sunt presupuse a fi direct proporționale cu efectivele ambelor tabere, iar pierderile taberei convenționale sunt direct proporționale doar cu efectivele taberei de gherilă. Neglijăm pierderile operaționale şi convenim că nu există reîmprospătarea celor două tabere. Modelul matematic este

$$\begin{cases} \dot{x} = -axy, \\ \dot{y} = -bx, \end{cases}$$

unde *a* şi *b* sunt constante reale strict pozitive. Acesta este un sistem de ecuații diferențiale ordinare neliniare, de ordinul I.

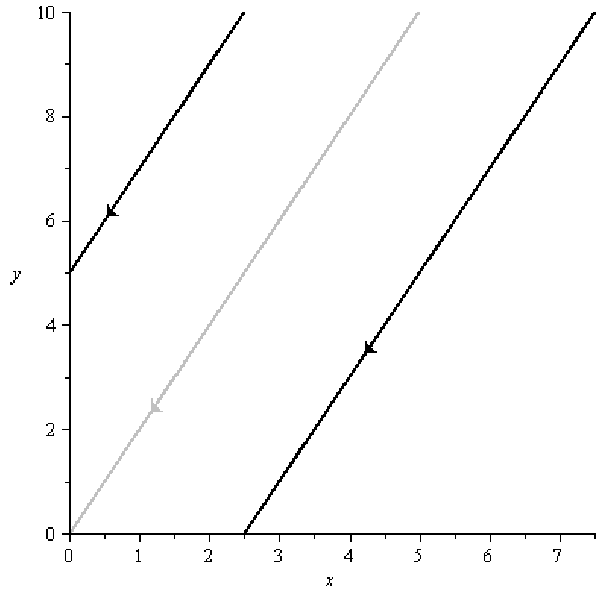


Figura 3.4.2. Evoluția în timp a conflictului în modelul GUERCOM

Știind efectivele inițiale ale celor două tabere obținem problema Cauchy de evoluție în timp a conflictului

$$\begin{cases} \dot{x} = -axy, \\ \dot{y} = -bx, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Soluție. Introducem funcția $L:\Re^2 \to \Re$ dată de relația

$$L(x,y) = -2bx + ay^2$$

şi arătăm că este *lege de conservare*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(x(t), y(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial L}{\partial y}\dot{y}(t) = -2b\cdot(-axy) + 2ay\cdot(-bx) \equiv 0 .$$

Utilizăm metoda de reducere a sistemului cu ajutorul legilor de conservare. De-a lungul soluției problemei Cauchy avem

$$-2bx(t)+ay^2(t)=-2bx_0+ay_0^2\overset{not}{=}K,$$

de unde exprimăm pe *x*(*t*) în funcție de *y*(*t*) obținând

$$x(t)=\frac{ay^2(t)-ay_0^2+2by_0}{2b}.$$

Înlocuind pe *x*(*t*) în a doua ecuație, obținem problema Cauchy în *y*(*t*)

$$\begin{cases}\dot{y}=-\dfrac{a}{2}y^2+\dfrac{k}{2},\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$

Ecuația diferențială poate fi tratată fie ca o ecuație cu variabile separabile, fie ca o ecuație Riccati. Expresia soluției depinde de semnul lui *K*.

În situația în care $K=0$ soluția este

$$y(t)=\frac{y_0}{\left(1+\frac{a}{2}y_0t\right)^2}.$$

Înlocuind în expresia lui *x* găsim

$$x(t)=\frac{x_0}{\left(1+\frac{a}{2}y_0t\right)^2}.$$

Pentru $K>0$, soluția problemei Cauchy în *y* este

$$y(t)=\sqrt{\frac{K}{a}}\tanh\left(\frac{\sqrt{aK}}{2}t+\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{a}{K}}y_0\right)\right),$$

în care am folosit funcția hiperbolică $\tanh:\Re\to(-1,1)$, dată de expresia

$$\tanh z=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}},$$

iar $\operatorname{arctanh}:(-1,1)\to\Re$ este inversa funcției tanh.

Înlocuind în expresia lui *x*, găsim

$$x(t) = -\frac{K}{2b\cosh^2\left(\frac{\sqrt{aK}}{2}t + \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{a}{K}}y_0\right)\right)}.$$

Pentru $K < 0$ soluția problemei Cauchy în y este

$$y(t) = -\sqrt{-\frac{K}{a}}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{-aK}}{2}t + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{-\frac{a}{K}}y_0\right)\right).$$

Înlocuind în expresia lui x găsim

$$x(t) = -\frac{K}{2b\cos^2\left(\frac{\sqrt{-aK}}{2}t + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{a}{K}}y_0\right)\right)}.$$

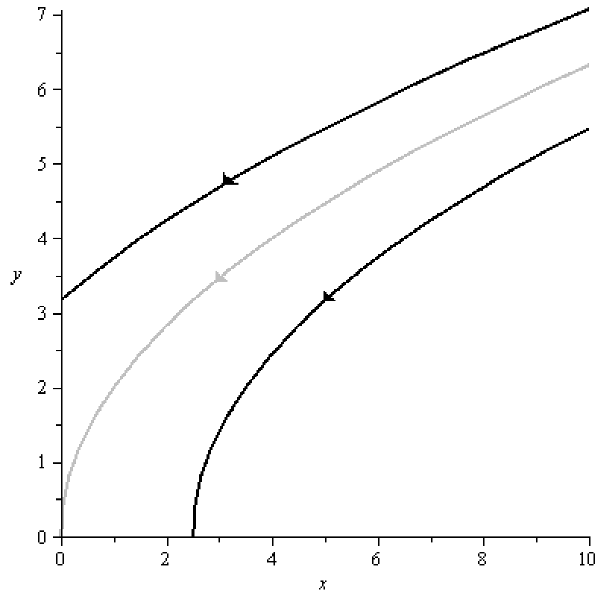


Figura 3.4.3. Evoluția în timp a conflictului în modelul VIETNAM

Interpretare fizică. Din considerente de natură practică ne limităm la primul cadran $\{(x, y) \in \Re^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Mulțimea

$$\mathrm{M}_K = \{(x, y) \in \Re^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, L(x, y) = K\}$$

este un *fragment de parabolă*. Evoluția în timp a conflictului rămâne în mulțimea $\mathcal{M}_K$ ce trece prin datele inițiale ($K = -2bx_0 + ay_0^2$). Pentru valori strict pozitive ale constantei K se obține un fragment de parabolă situat deasupra parabolei definite de $K = 0$, iar pentru valori strict negative ale constantei K se obține un fragment de parabolă situat sub parabola definită de $K = 0$. Prin analiza lui x şi y, sau urmărind figura 3.4.3, observăm că pentru $K = 0$ – situația de armistițiu – conflictul nu este câştigat de către niciuna dintre tabere, conflictul durând un timp foarte îndelungat ($t \to \infty$). Pentru $K > 0$, conflictul este câştigat de tabăra convențională y în timp "foarte mare" ($t \to \infty$). Pentru $K < 0$ conflictul este câştigat de tabăra de gherilă x în timp finit.

7. Bătălia de la IWO JIMA

Model matematic. Bătălia de la Iwo Jima a avut loc între SUA şi Imperiul Japonez între februarie şi martie 1945 în cadrul campaniei din oceanul Pacific a celui de-al Doilea Război Mondial. Armata SUA a instituit o blocadă militară asupra insulei Iwo Jima ocupată de armata japoneză. Miza era controlul asupra aeroportului militar de pe insulă. Dintr-un total estimat de 21500 de militari japonezi prezenți pe insulă la începutul conflictului peste 20000 au fost ucişi iar 1083 au fost luați prizonieri. Insula a fost declarată sigură de către forțele americane în a 28-a zi a conflictului şi toate activitățile de luptă au încetat în a 36-a zi. Interesant este că 2 soldați japonezi s-au ascuns în vasta rețea de tuneluri de pe insulă şi s-au predat abia în anul 1951.

Pentru construcția modelului matematic se utilizează un model de tip CONCOM în care se neglijează pierderile operaționale în ambele tabere, armata americană a putut să-şi reîmprospăteze efectivele în timp ce armata japoneză nu a avut această posibilitate din cauza blocadei. Notăm cu x efectivele armatei SUA implicate în conflict şi cu y efectivele japoneze. Modelul matematic este

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay + f(t), \\ \dot{y} = -bx, \end{cases}$$

unde *a*,*b* sunt constante strict pozitive iar *f(t)* reprezintă funcția de reîmprospătare a efectivelor SUA. Valorile numerice ale funcției de reîmprospătare apar în jurnalul de front ținut de căpitanul american Morehouse. Conform acestui jurnal funcția *f* are expresia:

$$f(t)=\begin{cases}54000 & 0\le t<1\\ 0 & 1\le t<2\\ 6000 & 2\le t<3\\ 0 & 3\le t<5\\ 13000 & 5\le t<6\\ 0 & 6\le t\end{cases}.$$

Pe baza datelor de mai sus putem vedea următoarele egalități:

$$x(0)=0,\ y(0)=21500,\ y(36)=0.$$

Soluție. Problema matematică constă în determinarea valorilor celor două constante *a* şi *b*. Determinarea acestora utilizează datele privind evoluția efectivelor americane în fiecare zi a conflictului păstrate în jurnalul de front al căpitanului Morehouse.

Constanta b o vom determina din cea de a doua ecuație diferențială a modelului prin integrare între timpul inițial $t_i=0$ şi timpul final $t_f=36$. Într-o primă fază obținem

$$\int_0^{36}\dot{y}\,\mathrm{d}t=-b\int_0^{36}x\,\mathrm{d}t\Rightarrow y(36)-y(0)=-b\int_0^{36}x\,\mathrm{d}t.$$

Din ecuația anterioară putem scrie

$$b=\frac{y(0)-y(36)}{\int_0^{36}x\,\mathrm{d}t}.$$

Tabelul 3.4.1. Efectivele SUA în timpul conflictului

1	2	3	4	5	6	7	8	9
52839	50945	56031	56031	53749	66155	65250	64378	62874

10	11	12	13	14	15	16	17	18
62339	61405	60667	59549	59345	59081	58779	58196	57259

19	20	21	22	23	24	25	26	27
56641	54792	55308	54796	54038	53938	53347	53072	52804

28	29	30	31	32	33	34	35	36
52735	52608	52507	52462	52304	52155	52155	52155	52140

Integrala $\int_0^{36} x \, \mathrm{d}t$ se aproximează cu ajutorul sumei Riemann corespunzătoare unei diviziuni echidistante de lungime 1 a intervalului $[0,36]$, iar ca puncte intermediare luăm capătul din dreapta al fiecărei diviziuni.

$$\int_0^{36} x \, \mathrm{d}t \approx \sum_1^{36} x(i) = 2.024.829 .$$

Pe baza acestei observații şi a rezultatelor anterioare, constanta *b* are valoarea

$$b = 0{,}0106 .$$

În continuare vom trece la determinarea constantei *a*. Integrăm prima ecuație diferențială între timpul inițial $t_i = 0$ şi timpul final $t'_f = 28$. Valoarea acestui timp

final a fost aleasă pentru că în cea de a 28-a zi insula Iwo Jima a fost considerată de către armata SUA ca sigură.

$$\int_0^{28} \dot{x}\,dt = -a\cdot\int_0^{28} y\,dt + \int_0^{28} f\,dt \Leftrightarrow x(28) - x(0) = -a\cdot\int_0^{28} y\,dt + \int_0^{28} f\,dt .$$

Din ecuația anterioară putem scrie

$$a = \frac{x(0) - x(28) + \int_0^{28} f\,dt}{\int_0^{28} y\,dt} .$$

Cunoscând funcția *f* putem scrie

$$\int_0^{28} f\,dt = 54000 + 6000 + 13000 = 73000 .$$

Așa cum am făcut mai sus aproximăm $\int_0^{28} y\,dt$ prin suma Riemann $\sum_{i=1}^{28} y(i)$. Valorile *y(i)* le aproximăm integrând a doua ecuație diferențială între *0* și *i.* Obținem

$$y(i) - y(0) = -b\cdot\int_0^{i} x\,dt \approx -b\cdot\sum_{j=1}^{i} x(j)$$

care conduce la

$$y(i) \approx 21.500 - b\cdot\sum_{j=1}^{i} x(j) .$$

Suma Riemann devine

$$\int_0^{28} y\,dt \approx \sum_{i=1}^{28} y(i) \approx \sum_{i=1}^{28} (21.500 - b\cdot\sum_{j=1}^{i} x(j)) .$$

Înlocuind în expresia lui *a,* utilizând datele din tabelul 3.4.1 și valoarea lui *b* determinată anterior găsim

$$a = 0,0577 .$$

Interpretare fizică. În acest moment, modelul matematic este complet. Cu ajutorul lui putem simula desfăşurarea bătăliei de la Iwo Jima. Datele astfel obținute le vom compara cu cele prezentate în Tabelul 3.4.1.

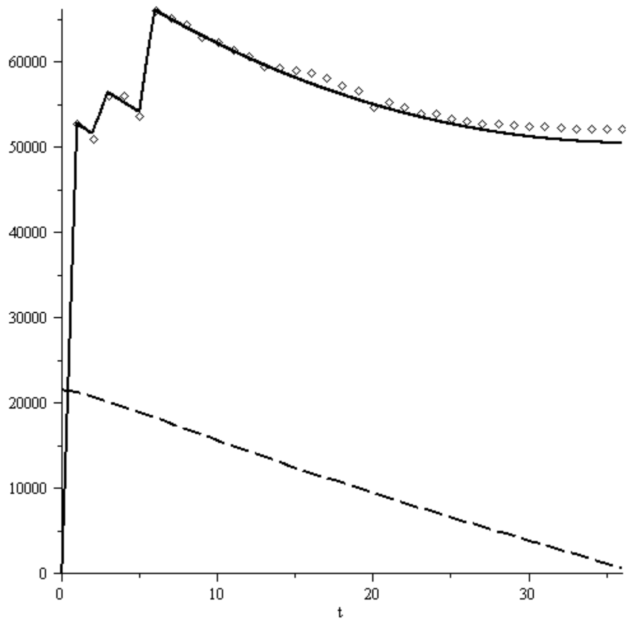


Figura 3.4.4. Evoluția în timp a bătăliei de la Iwo Jima

În figura 3.4.4 sunt prezentate prin puncte datele din jurnalul de front, prin linie continuă simularea numerică a efectivelor americane iar prin linie întreruptă simularea numerică a efectivelor japoneze. Se observă o bună corelare a datelor numerice cu datele observaționale ceea ce validează modelul matematic propus.

Aplicația 3.4.2. Vibrația sistemelor cu două grade de libertate (M.V.Soare [19,20])

Problema fizică. Două mase m_1 şi m_2 pot aluneca fără frecare în lungul unei axe orizontale, fiind legate cu resorturile de constante elastice k_1 şi k_2 (figura 3.4.5). Să se studieze mişcarea celor două resorturi.

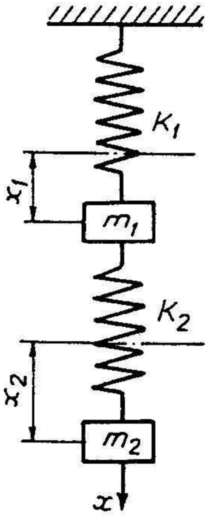


Figura 3.4.5. Vibrația a două mase m_1 și m_2 , legate cu resorturi de constante elastice k_1 și k_2

Model matematic. Vom preciza poziția celor două mase la timpul t prin deplasările x_1 şi x_2, măsurate față de pozițiile de echilibru static, când resorturile nu sunt solicitate. Eforturile din resorturi sunt indicate în figura 3.4.5. Ținând seama de forțele de inerție, ecuațiile mişcării se scriu (conform legii lui Newton)

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \tag{3.4.1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1). \tag{3.4.2}$$

Introducând notațiile

$$\frac{k_1 + k_2}{m_1} = a,\ \frac{k_2}{m_1} = b,\ \frac{k_2}{m_2} = c, \tag{3.4.3}$$

aceste ecuații se scriu sun forma mai simplă

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + ax_1 - bx_2 = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} - cx_1 + cx_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Am obținut un sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul II, lineare şi omogene, în raport cu funcțiile necunoscute x_1 şi x_2, variabila independentă fiind *t*.

Soluție. Soluția generală a sistemului poate fi obținută în două moduri: 1) metoda eliminării şi 2) metoda standard, prezentată în §3.2.

1) Eliminate una dintre necunoscute, de exemplu pe x_2. În acest scop, scriem sistemul (3.4.1), (3.4.2) sun forma

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+a\right)x_1-bx_2=0,\\ &-cx_1+\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+c\right)x_2=0. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Operatorii diferențiali $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+a$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+c$ sunt primi între ei. Aplicându-l pe primul celei de a doua ecuații şi pe cel de al doilea primei, îl eliminăm pe x_2 şi rezultă următoarea ecuație pentru x_1:

$$\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+a\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+c\right)-bc\right]x_1=0, \tag{3.4.6}$$

sau, dezvoltat,

$$\frac{\mathrm{d}^4x_1}{\mathrm{d}t^4}+(a+c)\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}+c(a-b)x_1=0. \tag{3.4.7}$$

Am obținut astfel o ecuație de ordinul IV, lineară şi omogenă, cu coeficienți constanți, pe care o rezolvăm cu metoda descrisă în §2.4. Căutând soluții de forma $x_1=\mathrm{e}^{\gamma t}$, deducem ecuația caracteristică

$$\gamma^4+(a+c)\gamma^2+c(a-b)=0, \tag{3.4.8}$$

care admite rădăcinile

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 = \pm\sqrt{-\frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc}}\ . \tag{3.4.9}$$

Cantitatea de sub al doilea radical este pozitivă, după cum se observă imediat, ținând seama de notațiile (3.4.3).

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc > 0\,.$$

Mai departe, din aceleaşi notații rezultă că $a-b>0$ şi deci valoiarea celui de al doilea radical este întotdeauna mai mică decât $(a+c)/2$. Astfel, sub primul radical avem totdeauna o cantitate negativă şi putem scrie $\gamma = \mathrm{i}p$, unde

$$p_1, p_2, p_3, p_4 = \pm\sqrt{\frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc}}\ . \tag{3.4.10}$$

Luând în considerare formulele lui Euler (în particular, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} = \cos p + \mathrm{i}\sin p$), soluția generală a ecuației (3.4.7) poate fi scrisă sub forma reală

$$x_1 = C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t\ . \tag{3.4.11}$$

A doua funcție, x_2, poate fi determinată direct din prima ecuație a sistemului (3.4.5):

$$x_2 = \frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1 + \frac{k_1 + k_2}{k_2}x_1. \tag{3.4.12}$$

Observând că $p_3 = -p_1$ și $p_4 = -p_2$, relația (3.4.11) poate fi adusă la forma

$$x_1 = A_1 \sin(p_1 t + \alpha') + A_2 \sin(p_2 t + \alpha''), \tag{3.4.13}$$

iar (3.4.12) la forma corespunzătoare

$$x_2 = \lambda' A_1 \sin(p_1 t + \alpha') + \lambda'' A_2 \sin(p_2 t + \alpha''), \tag{3.4.14}$$

în care

$$\lambda' = \frac{a - p_1^2}{b} = \frac{c}{c - p_1^2}\,,\ \lambda'' = \frac{a - p_2^2}{b} = \frac{c}{c - p_2^2}\,. \qquad (3.4.15)$$

2) În al doilea procedeu, vom scrie sistemul (3.4.5) sub forma unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I, introducând două noi funcţii auxiliare necunoscute u şi v,

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = u, \\ &\dot{u} = -ax_1 + bx_2, \\ &\dot{x}_2 = v, \\ &\dot{v} = cx_1 - cx_2. \end{aligned} \qquad (3.4.16)$$

Conform celor expuse în §3.2, vom determina valorile proprii ale matricei **P** a sistemului, care satisfac

$$\det[\mathbf{P} - \lambda\mathbf{E}] = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -a & -\lambda & b & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ c & 0 & -c & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (3.4.17)$$

ceea ce conduce la ecuaţia bipătrată
leading to the biquadratic ecuaţia

$$\lambda^4 + (a + c)\lambda^2 + c(a - b) = 0, \qquad (3.4.18)$$

aceeaşi cu (3.4.8). Deducem în acelaşi mod că rădacinile ei sunt pur imaginare, fiind date de (3.4.10). Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\mathrm{i}p_1$ este

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i}p_1 \\ \dfrac{a - p_1^2}{b} \\ \mathrm{i}p_1 \dfrac{a - p_1^2}{b} \end{bmatrix}.$$

Determinând ceilalți vectori proprii, corespunzători valorilor proprii $-\mathrm{i}p_1, \pm\mathrm{i}p_2$, deducem soluția generală a sistemului (3.4.5) sub forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ u \\ x_2 \\ v \end{bmatrix} = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i}p_1 \\ \dfrac{a-p_1^2}{b} \\ \mathrm{i}p_1 \dfrac{a-p_1^2}{b} \end{bmatrix} + \overline{\alpha} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}p_1 \\ \dfrac{a-p_1^2}{b} \\ -\mathrm{i}p_1 \dfrac{a-p_1^2}{b} \end{bmatrix}$$
$$+ \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i}p_2 \\ \dfrac{a-p_2^2}{b} \\ \mathrm{i}p_2 \dfrac{a-p_2^2}{b} \end{bmatrix} + \overline{\beta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}p_2 \\ \dfrac{a-p_2^2}{b} \\ -\mathrm{i}p_2 \dfrac{a-p_2^2}{b} \end{bmatrix}, \tag{3.4.19}$$

unde $\alpha = A + \mathrm{i}B$, $\beta = C + \mathrm{i}D$, iar A, B, C, D sunt constante reale arbitrare. Rezultă

$$x_1 = A\cos p_1 t - B\sin p_1 t + C\cos p_2 t - D_4 \sin p_2 t,$$
$$x_2 = \frac{a-p_1^2}{b}\left(A\cos p_1 t - B\sin p_1 t\right) + \frac{a-p_2^2}{b}\left(C\cos p_2 t - D_4 \sin p_2 t\right). \tag{3.4.20}$$

Luând acum $A_1 = -B$, $\alpha' = \arctan(-A/B)$, $A_2 = -D$, $\alpha'' = \arctan(-C/D)$, obținem forma (3.4.13), (3.4.14) a soluției.

În final, să observăm că, deoarece problema tratată este o problemă de vinrații, ne puteam aștepta de la bun început la soluții sub formă trigonometrică. Pentru simplificarea calculelor putem deci admite pentru x_1 și x_2 expresii de forma

$$x_1 = A\sin(pt + \alpha),$$
$$x_2 = B\sin(pt + \alpha), \tag{3.4.21}$$

unde A, B, p, α sunt constante nedeterminate. Introducând aceste expresii în sistemul (3.4.5) și simplificând liniile trigonometrice, ajungem la sistemul de ecuații algebrice lineare și omogene

$$\begin{aligned} &A\left(a-p^2\right)-Bb=0,\\ &-Ac+B\left(c-p^2\right)=0. \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

Soluția banală $A=B=0$ defineşte condiția de echilibru. O soluție nebanală va exista doar dacă se anulează determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} a-p^2 & -b \\ -c & c-p^2 \end{vmatrix}=0, \tag{3.4.23}$$

care, dezvoltat, conduce la ecuația bipătrată

$$p^4-(a+c)p^2+c(a-b)=0;$$

aceasta coincide cu ecuația (3.4.8) în γ, de rădăcini (3.4.10).

Deoarece sistemul algebric este omogen, putem determina doar raportul B/A; calculul corespunzător celor două valori p_1^2 şi p_2^2 conduce la $B_1/A_1=\lambda'$ şi $B_2/A_2=\lambda''$, cu valorile (3.4.15) date precedent.

Aplicația 3.4.3 (M.V.Soare [19,20])

Problema fizică. Se consideră o coardă verticală întinsă puternic de o forță S. Pe coardă sunt fixate, la distanțe egale, trei mase *m* (figura 3.4.6 a)). Admițând că, pentru micile deplasări transversale, forța din coardă nu se modifică apreciabil, se cere să se determine tipurile de vibrație.

Model matematic. Notăm cu *a* distanța dintre mase şi cu y_1,y_2,y_3 deplasările transversale ale celor trei mase. Ecuațiile de mişcare se scriu, pentru fiecare dintre particule

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y}_1 &= -\frac{S}{a}(2y_1 - y_2),\\
m\ddot{y}_2 &= -\frac{S}{a}(-y_1 + 2y_2 - y_3),\\
m\ddot{y}_3 &= -\frac{S}{a}(-y_2 + 2y_3).
\end{aligned}
\tag{3.4.24}
$$

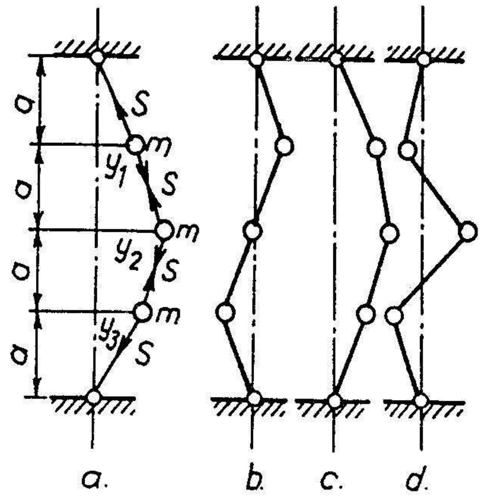


Figura 3.4.6. a) Coarda întinsă de o forță S având fixate trei mase m; b),c),d) cele trei tipuri de vibrații

Soluție. Cu notația

$$b = \sqrt{\frac{S}{am}}, \tag{3.4.25}$$

introducând variabila

$$\tau = bt, \tag{d}$$

sistemul capătă forma simplificată

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 y_1}{d\tau^2} &= -2y_1 + y_2,\\
\frac{d^2 y_2}{d\tau^2} &= y_1 - 2y_2 + y_3,\\
\frac{d^2 y_3}{d\tau^2} &= y_2 - 2y_3.
\end{aligned}
\tag{3.4.26}
$$

Metoda matriceală, deşi generală, conduce aici la calcule laborioase. De aceea, vom prefera metoda eliminării. Observăm că, scăzând ultima ecuație din prima, funcția $\varphi = y_1 - y_3$ satisface ecuația diferențială ordinară lineară şi omogenă de ordinul II, cu coeficienți constanți,

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\varphi = 0. \tag{3.4.27}$$

Ecuația caracteristică asociată este

$$\lambda^2 + 2 = 0, \tag{3.4.28}$$

şi deci

$$\varphi = y_1 - y_3 = \alpha_1 \cos\sqrt{2}\tau + \beta_1 \sin\sqrt{2}\tau = A_1 \cos\left(\sqrt{2} - \delta_1\right). \tag{3.4.29}$$

Mai departe, adunăm prima şi ultima ecuație (3.4.26) şi deducem

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{d\tau^2}(y_1 + y_3) = -2(y_1 + y_3) + 2y_2, \\ &\frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + 2y_2 = y_1 + y_3. \end{aligned} \tag{3.4.30}$$

Derivând de două ori ultima ecuație şi înlocuind în prima, îl eliminăm pe y_1, obținând pentru y_2 ecuația diferențială de ordinul IV, lineară şi omogenă, cu coeficienți constanți

$$\frac{d^4 y_2}{d\tau^4} + 4\frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + 2y_2 = 0. \tag{3.4.31}$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 2 = 0, \tag{3.4.32}$$

cu rădăcinile $\pm i\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\pm i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Deci soluția generală a ecuației (3.4.31) este

$$y_2(\tau) = A_2 \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\tau - \delta_2\right) + A_3 \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\tau - \delta_3\right). \tag{3.4.33}$$

Din cea de a doua ecuație (3.4.30) deducem

$$y_1 + y_3 = \sqrt{2}\left[A_2 \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\tau - \delta_2\right) - A_3 \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\tau - \delta_3\right)\right], \tag{3.4.34}$$

care, împreună cu (3.4.29), determină pe y_1 şi y_3

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{A_1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\tau - \delta_1\right) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left[A_2 \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\tau - \delta_2\right) - A_3 \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\tau - \delta_3\right)\right], \\ y_3 &= -\frac{A_1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\tau - \delta_1\right) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left[A_2 \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\tau - \delta_2\right) - A_3 \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\tau - \delta_3\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.4.35}$$

Formulele (3.4.33) şi (3.4.35) reprezintă soluția generală a sistemului în τ, pentru A_j, δ_j, $j = 1, 2, 3$ constante arbitrare.

Cele trei tipuri de oscilații sunt indicate în figura 3.4.6 b), c), d).

Aplicația 3.4.4 (M.V.Soare [19,20])

Problema fizică. Să se studieze vibrațiile de translație şi rotație în planul *xOz* ale unui bloc de fundație aşezat pe un teren elastic.

Model matematic. Ecuațiile diferențiale care guvernează fenomenul sunt, în planul Ozx,

$$m\ddot{x} + k_x x - k_x h\varphi = 0, \tag{3.4.36}$$

$$J\ddot{\varphi} + \left(k_\varphi - Gh + k_x h^2\right)\varphi - k_x hx = 0, \tag{3.4.37}$$

unde

- J este momentul de inerție masic al ansamblului fundație-maşină față de axa *Oy* (normală pe planul *xOz*) trecând prin centrul de greutate,
- *G* – greutatea blocului aşezat pe teren elastic,
- *h* – cota centrului de greutate măsurată față de teren,

- x – deplasarea de translație în sensul axei Ox
- – rotația în jurul axei Oy,
- k_x – forța orizontală produsă de o deplasare unitate,
- k_φ – momentul în planul xOz produs de o rotire unitate (figura 3.4.7).

Soluție. Ecuațiile (3.4.36) şi (3.4.37) sunt cuplate; ele pot fi scrise sub forma operatorială

$$\left(m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+k_x\right)x-k_xh\varphi=0\,, \tag{3.4.38}$$

$$-k_xhx+\left(J\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+k_xh^2+k_\varphi-Gh\right)\varphi=0\,. \tag{3.4.39}$$

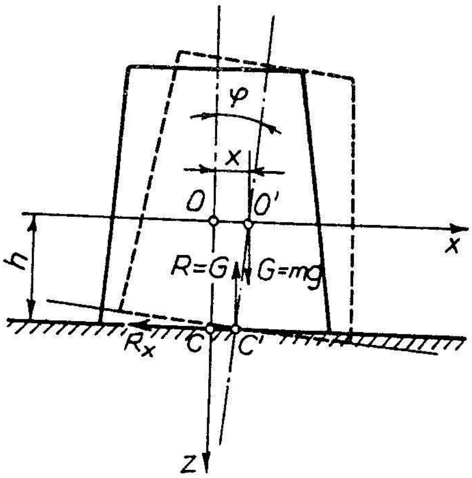


Figura 3.4.7. Bloc de fundație aşezat pe teren elastic

Aplicând operatorul $\left(m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+k_x\right)$ celei de a doua ecuații, înmulțind ecuația (3.4.38) cu $-k_xh$ şi adunând rezultatele membru cu membru, se elimină deplasarea x şi se obține pentru rotația φ următoarea ecuație diferențială ordinară de ordinul IV, lineară şi omogenă, cu coeficienți constanți (vezi §2.4):

$$mJ\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}t^4}+\left(mk_xh^2+mk_\varphi-mGh+Jk_x\right)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+k_x\left(k_\varphi-Gh\right)\varphi=0. \tag{3.4.40}$$

Căutând soluții de forma exponențială e^{rt}, găsim pentru r ecuația caracteristică

$$r^4+\left(\frac{k_xh^2+h\varphi-Gh}{J}+\frac{k_x}{m}\right)r^2+\frac{k_x\left(k_\varphi-Gh\right)}{mJ}=0. \tag{3.4.41}$$

Mai introducem notațiile

$$p_x^2=\frac{k_x}{m},\ p_\varphi^2=\frac{k_\varphi-Gh}{J+mh^2},\ \gamma=\frac{J}{J+mh^2},\ \gamma\in[0,1], \tag{3.4.42}$$

unde p_x este pulsația limită a vibrației de translație în cazul în care nu există rotații, iar p_φ este pulsația limită a of vibrației de rotație în absența alunecărilor.

Ecuația bipătrată (3.4.41) devine

$$\gamma r^4+\left(p_x^2+p_\varphi^2\right)r^2+p_x^2p_\varphi^2=0;$$

rădăcinile ei sunt obținute din

$$r^2=\frac{1}{2\gamma}\left[-\left(p_x^2+p_\varphi^2\right)\pm\sqrt{\left(p_x^2+p_\varphi^2\right)^2-4\gamma p_x^2p_\varphi^2}\right]$$

şi sunt toate pur imaginare. Vom putea căuta atunci direct soluția sistemului (3.4.38), (3.4.39) sub firma

$$\begin{aligned}\varphi&=B\sin\left(pt+\alpha\right),\\ x&=C\sin\left(pt+\alpha\right),\end{aligned}. \tag{3.4.43}$$

unde B, C,α sunt constante ce urmează a fi determinate pe baza condițiilor inițiale. Înlocuind în sistemul (3.4.38), (3.4.39) şi simplificând liniile trigonometrice, ajungem la sistemul de ecuații algebrice lineare şi omogene scris sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix}k_x-mp^2 & -k_xh\\ -k_xh & k_\varphi-Gh+-k_xh^2-Jp^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ B\end{bmatrix}=0. \tag{3.4.44}$$

Pentru a obține soluții nenule, trebuie ca determinanul asociat sistemului să se anuleze; dezvoltându-l, deducem ecuația pulsațiilor p

$$\gamma\, p^4 + \left(p_x^2 + p_\varphi^2\right)p^2 + p_x^2 p_\varphi^2 = 0\,,$$

care diferă de ecuația în r doar prin semnul termenului în r^2 (acest fapt este explicabil prin schimbarea lui r în ip. Rădăcinile acestei ecuații sunt

$$p_1^2\,,\, p_2^2 = \frac{1}{2\gamma}\left[\,p_x^2 + p_\varphi^2 \pm \sqrt{\left(p_x^2 + p_\varphi^2\right)^2 - 4\gamma\, p_x^2 p_\varphi^2}\,\right]. \qquad (3.4.45)$$

În concluzie, în mişcarea cu două grade de libertate, sistemul maşină-fundație poate vibra cu una din pulsațiile principale p_1 sau p_2, date de relația (3.4.45).

Raportul amplitudinilor B şi C ale celor două vibrații poate fi calculat cu ajutorul primei ecuații (3.4.44):

$$\frac{C}{B} = \frac{k_x h}{k_x - mp^2} = \frac{\frac{k_x}{m}h}{\frac{k_x}{m} - p^2} = \frac{p_x^2 h}{p_x^2 - p^2}\,. \qquad (3.4.46)$$

Observație. Sistemul (3.4.38), (3.4.39) poate fi rezolvat şi direct, cu metoda matriceală descrisă în §2.4, scriindu-l mai întâi sub forma unui sistem de ordinul I cu ajutorul a două funcții auxiliare y şi ψ

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = y,\\
&\dot{y} = -p_x^2 x + hp_x^2\,,\\
&\dot{\varphi} = \psi,\\
&\dot{\psi} = \frac{hm}{J}\,p_x^2 x - \left(\frac{p_\varphi^2}{\gamma} + p_x^2\,\frac{mh^2}{J}\right)\varphi.
\end{aligned} \qquad (3.4.47)$$

Determinantul caracteristic asociat este

$$\det[\mathbf{P}-\lambda\mathbf{E}]=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -p_x^2 & -\lambda & hp_x^2 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{hm}{J}p_x^2 & 0 & -\left(\frac{p_\varphi^2}{\gamma}+p_x^2\frac{mh^2}{J}\right) & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^4+\frac{p_x^2+p_\varphi^2}{\gamma}\lambda^2+\frac{p_x^2p_\varphi^2}{\gamma}.$$

Anulându-l, vom găsi valorile proprii ale matricei **P** a sistemului (3.4.47), care sunt pur imaginare şi coincid cu rădăcinile ecuației în r (3.4.41). Ținând seama de forma sistemului, vom putea căuta soluția sistemului (3.4.47), ca şi în cazul metodei precedente, sub forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A\sin(rt+\alpha) \\ B\cos(rt+\alpha) \\ C\sin(rt+\alpha) \\ D\cos(rt+\alpha) \end{bmatrix}. \tag{3.4.48}$$

De la acest punct, rezolvarea problemei urmează acelaşi drum ca cel din metoda precedentă.

Aplicația 3.4.5 (M.V.Soare [19,20])

Problema fizică. Fundația unei maşini de greutate Q este aşezată pe un mediu elastic (figura 3.4.8). Aria bazei fundației este S, iar coeficientul de elasticitate a mediului este k_s. Pentru a evita rezonanța ce poate să apară în timpul funcționării, maşina este aşezată pe un cadru rigid, legat de fundație prin intermediul unor arcuri a căror constantă elastică echivalentă este k_1. Greutatea maşinii şi a cadrului este P. Se cere să se determine pulsațiile sistemului fundație + maşină. Date numerice: $Q=9.8\cdot10^6\,N$, $S=17m^2$, $k_s=58.8\cdot10^6\,N/m^3$, $k_1=49\cdot10^6\,N/m$, $P=48.02\cdot10^3\,N$.

Model matematic. Se scriu ecuațiile diferențiale ale mişcării măsurând deplasările x_1 şi x_2 din poziția statică de echilibru a sistemului; se obține

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0, \qquad (3.4.49)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + (k_1 + k)x_2 - k_1x_1 = 0, \qquad (3.4.50)$$

unde s-a notat $k = k_s S$.

***Soluție*.** Sistemul de ecuații diferențiale ordinare lineare de ordinul II (3.4.49), (3.4.50) poate fi scris sub forma unui sistem de ordinul I. Putem, însă, căuta direct funcțiile necunoscute sub forma exponențială

$$x_1 = C_1 e^{\beta t},\ x_2 = C_2 e^{\beta t};$$

rezultă

$$m_1\beta^2 C_1 + k_1(C_1 - C_2) = 0,$$
$$m_2\beta^2 C_2 + (k_1 + k)C_2 - k_1C_1 = 0.$$

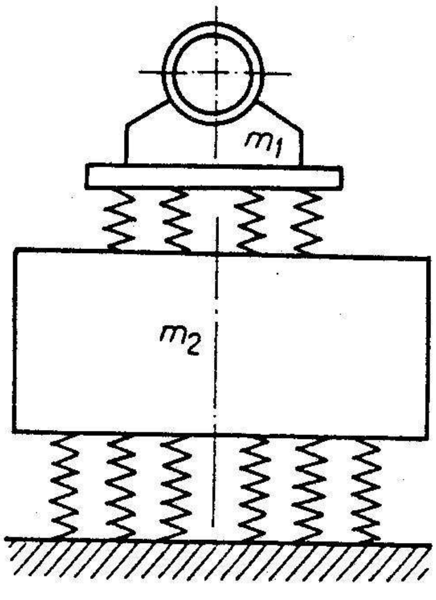


Figura 3.4.8. Fundația unei mașini așezată pe un cadru rigid

Am ajuns la un sistem de ecuații algebrice lineare, care are drept necunoscute C_1, C_2. Deoarece acestea nu trebuie să fie simultan nule, rezultă că determinantul asociat sistemului trebuie să se anuleze, adică

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1\beta^2 + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & m_2\beta^2 + k_1 + k \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$\beta^4 + \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k}{m_2}\right)\beta^2 + \frac{k_1 k}{m_1 m_2} = 0. \qquad (3.4.51)$$

Ținând seama că $m_1 = P/g$ şi $m_2 = Q/g$, ecuația de mai sus devine

$$\beta^4 + g\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_s S + k_1}{Q}\right)\beta^2 + \frac{k_1 k_s S g^2}{PQ} = 0. \qquad (3.4.52)$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt

$$\beta_1^2, \beta_2^2 = -\frac{g}{2}\left[\frac{k_1}{2} + \frac{k_s S + k_1}{Q} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_s S + k_1}{Q}\right)^2 - \frac{4k_1 k_s S}{PQ}}\right].$$

Notăm $\beta_i^2 = -p_i^2$, $i = 1, 2$. Introducând datele numerice, avem

$$p_1^2, p_2^2 = \frac{9.81}{2}\left[\frac{49\cdot 10^6}{48.02\cdot 10^3} + \frac{58.8\cdot 10^6\cdot 17 + 49\cdot 10^6}{9.8\cdot 10^6} \pm \right.$$
$$\left. \pm\sqrt{\left(\frac{49\cdot 10^6}{48.02\cdot 10^3} + \frac{58.8\cdot 10^6\cdot 17 + 49\cdot 10^6}{9.8\cdot 10^6}\right)^2 - \frac{4.49\cdot 10^6\cdot 458.810^6\cdot 17}{48.02\cdot 10^3\cdot 9.8\cdot 10^6}}\right] =$$
$$= 4.905\left(1020.408163 + 107 \pm \sqrt{1127.408163^2 - 416326.5308}\right)$$
$$= 4.905(1127.408163 + 107 \pm 924.512107),$$

de unde

$$p_1^2 = 995.2051568\, s^{-2},\; p_2^2 = 10064.66892 s^{-2},$$

şi

$$p_1 = 31.547 s^{-1},\; p_2 = 100.323 s^{-1}.$$

Întrucât rădăcinile ecuației caracteristice (3.4.52) sunt în acest caz pur imaginare, soluția sistemului (3.4.49), (3.4.50) este de forma

$$x_1 = A_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(p_2 t + \alpha_2),$$
$$x_2 = A_1\left(1 - \frac{m_1 p_1^2}{k_1}\right)\sin(p_1 t + \alpha_1) + A_2\left(1 - \frac{m_1 p_2^2}{k_l}\right)\sin(p_2 t + \alpha_2).$$

Aplicația 3.4.6. Amortizorul dinamic (M.V.Soare [19,20])

Problema fizică. O maşină de masă M, rezemată pe un resort elastic de constantă K, este supusă unei forțe verticale pulsatorii $F = F_0 \sin \omega t$. Deoarece, la o anumită viteză de funcționare a maşinii, frecvența forței pulsatorii poate deveni egală cu frecvența vibrațiilor proprii ale sistemului (M, K), existând pericolul de rezonanță (figura 3.4.9.a), se obişnuieşte să se echipeze instalația cu un amortizor dinamic, constând dintr-o masă m legată de maşina M printr-un resort având constanta elastică k (figura 3.4.9 b). Sistemul astfel obținut are două grade de libertate. Se cere să se determine mişcările celor două mase în condiții inițiale nule.

Model matematic. Sistemul de ecuații diferențiale ordinare care defineşte deplasările x şi y la momentul t se scrie astfel

$$m\ddot{y} = -k(y - x), \tag{3.4.53}$$

$$M\ddot{x} = k(y - x) - Kx + F_0 \sin \omega t, \tag{3.4.54}$$

iar condițiile inițiale sunt

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0. \tag{3.4.55}$$

Soluție. Cu notațiile

$$\frac{K}{M} = \alpha^2,\ \frac{k}{m} = \beta^2,\ \frac{k}{M} = \gamma^2,\ \frac{F_0}{M} = f_0, \tag{3.4.56}$$

sistemul (3.4.53), (3.4.54) devine

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \beta^2\right)y - \beta^2 x = 0, \tag{3.4.57}$$

$$-\gamma^2 y + \left(J \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \alpha^2 + \gamma^2 \right) x = f_0 \sin \omega t . \tag{3.4.58}$$

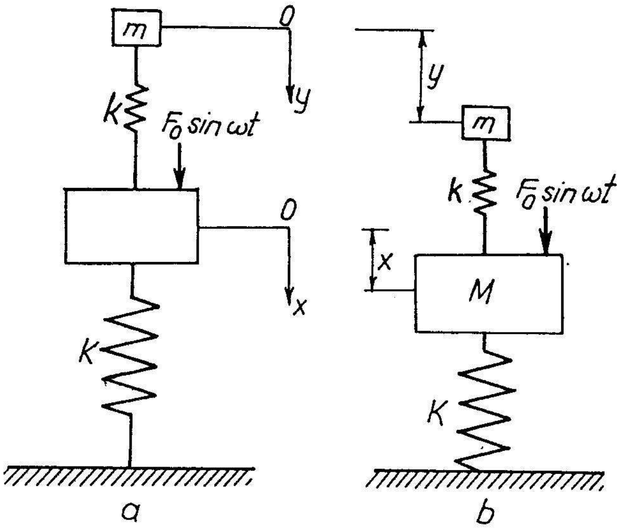


Figura 3.4.9. a)Rezonanța sistemului mecanic; b) amortizorul dinamic

Eliminând, ca în aplicațiile 3.4.2 şi 3.4.4, funcția y între aceste ecuații, găsim

$$\left[\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4} + \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) + \alpha^2\beta^2 \right] x = f_0 \left(\beta^2 - \omega^2\right) \sin \omega t . \tag{3.4.59}$$

În mod asemănător se poate elimina şi funcția x şi rezultă

$$\left[\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4} + \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \alpha^2\beta^2 \right] y = f_0 \beta^2 \sin \omega t . \tag{3.4.60}$$

Aşa cum era de aşteptat, operatorul diferențial aplicat funcțiilor x şi y este acelaşi, deoarece (3.4.57), (3.4.58) este linear şi cu coeficienți constanți.

Observând că în ecuațiile (3.4.59), (3.4.60) intervin doar derivate de ordin par, putem obține soluțîi particulare de forma

$$x_p = A \sin \omega t , \ y_p = B \sin \omega t . \tag{3.4.61}$$

Introducând aceste expresii în (3.4.59), (3.4.60), deducem

$$x_p = \frac{1}{N} f_0 \left(\beta^2 - \omega^2\right) \sin \omega t, \ y_p = \frac{1}{N} f_0 \beta^2 \sin \omega t, \tag{3.4.62}$$

în care s-a notat

$$N = \omega^4 - \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\omega^2 + \alpha^2 \beta^2. \tag{3.4.63}$$

Interpretare fizică. Vibrațiile proprii (reprezentate de soluția ecuațiilor omogene asociate) pot fi neglijate, păstrându-se doar vibrațiile forțate (reprezentate de soluția particulară (3.4.61). Expresiile (3.4.61) arată că masele *m* şi *M* capătă o mişcare simplă armonică imediat ce vibrațiile proprii s-au stins.

Rezistența dintre forța pulsantă *F* şi sistemul (M, K) se produce atunci când frecvența ω a lui *F* şi frecvența proprie $\alpha = \sqrt{K/M}$ a sistemului (M, K) sunt egale. Luând deci $\alpha = \omega$, expresiile (3.4.61) devin

$$x_p = -\frac{1}{\omega^2 \gamma^2} f_0 \left(\beta^2 - \omega^2\right) \sin \omega t, \ y_p = -\frac{1}{\omega^2 \gamma^2} f_0 \beta^2 \sin \omega t; \tag{3.4.64}$$

ele demonstrează că amplitudinea lui x_p – care, în mod normal, ar fi infinită – se reduce, datorită amortizorului, la valoarea finită $f_0 \left(\beta^2 - \omega^2\right) / \omega^2 \gamma^2$.

Dacă, în plus, se aleg valorile lui k şi m ale amortizorului astfel încât $\alpha = \beta = \omega$, relațiile (3.4.64) se reduc la

$$x_p = 0, \ y_p = -\frac{1}{\gamma^2} f_0 \sin \omega t;$$

ele demonstrează că *amortizorul*, denumit *acordat*, anulează în întregime vibrațiile lui *M*.

CAPITOLUL 4

STABILITATE

Definiția neformală a stabilității este proprietatea unui sistem de a nu își modifica considerabil evoluția în urma unor mici perturbări ale stării inițiale.

Această formulare neriguroasă, care a provenit din considerente practice (în special din mecanică) se traduce în teoria ecuațiilor diferențiale prin mai multe concepte, care descriu diverse tipuri de continuitate a soluției unei ecuații diferențiale ca funcție de datele inițiale.

4.1. STABILITATEA SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Fie $\mathbf{f}(.,.) : D \to \Re^n$, $D = [0; \infty) \times \Omega$, $\Omega \subset \Re^n$ care definește ecuația diferențială

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \tag{4.1.1}$$

Presupunem că problema Cauchy definită de ecuația (4.1.1) și condiția inițială $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ are soluție unică $\forall (t_0, \mathbf{x}_0) \in D$. De asemenea, presupunem că ecuația (4.1.1) are o soluție $\varphi(.) : [0, \infty) \to \Omega$. Cu $\|.\|$ notăm norma euclidiană pe $\Re^n$.

Definiția 4.1. a) Soluția $\varphi(.) : [0, \infty) \to \Omega$ a ecuației (4.1.1) se numește (*simplu*) *stabilă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $t_0 \geq 0$ există $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ astfel încât pentru orice $x_0 \in \Omega$ cu $\| x_0 - \varphi(t_0) \| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$, unica soluție maximală $x(., t_0, x_0)$ a ecuației (4.1.1) care verifică $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ este definită pe $[t_0, +\infty)$ și

$$\| x(t, t_0, x_0) - \varphi(t) \| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

b) Soluția $\varphi(.):[0,\infty)\to\Omega$ a ecuației (4.1.1) se numeşte *uniform stabilă* dacă este stabilă şi $\delta(\varepsilon, t_0)$ din proprietatea a) nu depinde de $t_0 \geq 0$.

c) Soluția $\varphi(.):[0,\infty)\to\Omega$ a ecuației (4.1.1) se numeşte *asimptotic stabilă* dacă este stabilă şi dacă pentru orice $t_0 \geq 0$ există $\mu(t_0) > 0$ astfel încât pentru orice $x_0\in\Omega$ cu $\| x_0 - \varphi(t_0) \| \leq \mu(t_0)$, unica soluție maximală $x(., t_0, x_0)$ a ecuației (4.1.1) care verifică $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ este definită pe $[t_0, +\infty)$ şi

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t, t_0, x_0) - \varphi(t) \| = 0 .$$

d) Soluția $\varphi(.):[0,\infty)\to\Omega$ a ecuației (4.1.1) se numeşte *uniform asimptotic stabilă* dacă este uniform stabilă şi dacă există $\mu > 0$ astfel încât $\forall t_0 \geq 0$, $\forall x_0 \in \Omega$ cu $\| \mathbf{x}_0 - \varphi(t_0) \| \leq \mu$ unica soluție maximală $\mathbf{x}(., t_0, \mathbf{x}_0)$ a ecuației (4.1.1) care verifică $\mathbf{x}(t_0, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ este definită pe $[t_0, \infty)$ şi $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, t_0(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall t_0 \geq 0$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega$ cu $\| \mathbf{x}_0 - \varphi(t_0) \| \leq \mu$ şi orice $t \geq t_0 + t_0(\varepsilon)$ avem

$$\| \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t) \| \leq \varepsilon .$$

Observația 4.1. Este imediat din definiția precedentă că orice soluție $\varphi(.)$ a ecuației (4.1.1) care este uniform asimptotic stabilă este atât uniform stabilă cât şi asimptotic stabilă. De asemenea, orice soluție uniform sau asimptotic stabilă este (simplu) stabilă. Pe de altă parte, stabilitatea simplă nu implică stabilitatea uniformă, iar stabilitatea uniformă nu o implică pe cea uniform asimptotică.

Observația 4.2. Prin schimbarea de variabilă $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \varphi(t)$ studiul oricărui tip de stabilitate referitor la soluția $\varphi(.)$ se reduce la studiul aceluiaşi tip de stabilitate referitor la soluția identic nulă a ecuației diferențiale

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \varphi(t)) - \varphi'(t) ;$$

de aceea, se poate admite că $0 \in \Omega$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ şi se va studia doar stabilitatea soluției identic nule, $\varphi_0(t) \equiv \mathbf{0}$, a ecuației (4.1.1).

Considerăm, în continuare, ecuațiile diferențiale liniare de forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{4.1.2}$$

unde $\mathbf{A}(.) : [0, +\infty) \to \mathcal{M}_n(\Re)$ este o funcție continuă.

Observația 4.3. Dacă, în general, stabilitatea este o proprietate a soluției şi nu a ecuației, în cazul sistemelor liniare, deoarece prin schimbarea de variabilă $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\varphi}(t)$, soluția $\boldsymbol{\varphi}(.)$ a ecuației (4.1.2) se transformă în soluția identic nulă a ecuației (4.1.2), rezultă că dacă soluția identic nulă a ecuației (4.1.2) este stabilă (respectiv, asimptotic stabilă, uniform stabilă, uniform asimptotic stabilă) atunci toate soluțiile ecuației (4.1.2) sunt stabile (respectiv, asimptotic stabile, uniform stabile, uniform asimptotic stabile).

Din acest motiv vom vorbi, în continuare, despre stabilitatea ecuației (4.1.2) şi vom înțelege stabilitatea soluției identic nule (sau a oricărei soluții maximale).

Teorema 4.1. *Următoarele afirmații sunt echivalente.*

a) Ecuația (4.1.2) *este stabilă.*

b) Ecuația (4.1.2) *are un sistem fundamental de soluții mărginite pe* $\Re_+ = [0,+\infty)$.

c) Toate soluțiile maximale ale ecuației (4.1.2) *sunt mărginite pe* $\Re_+$.

d) Toate matricele fundamentale de soluții ale ecuației (4.1.2) *sunt mărginite pe* $\Re_+$.

e) Ecuația (4.1.2) *are o matrice fundamentală de soluții mărginită pe* $\Re_+$.

Observația 4.4. Afirmații asemănătoare celor din teorema 4.1 se pot formula şi pentru celelalte tipuri de stabilitate.

Considerăm, mai departe, ecuațiile liniare cu coeficienți constanți de forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{4.1.3}$$

unde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\Re)$.

Matricea **A** se numeşte *hurwitziană* dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$ au partea reală strict negativă.

Teorema 4.2. *Dacă ecuația* (4.1.3) *este asimptotic stabilă atunci* **A** *este hurwitziană. Dacă matricea* **A** *este hurwitziană, atunci ecuația* (4.1.3) *este uniform asimptotic stabilă.*

Considerăm acum sisteme de ecuații diferențiale ,,perturbate" de forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t, \mathbf{x}) \tag{4.1.4}$$

unde $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathfrak{R})$, $\mathbf{b}(.\,,.) : D = \mathfrak{R}_+ \times \Omega \to \mathfrak{R}^n$ este o funcție vectorială continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument, iar $\mathbf{b}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ pentru orice $t \geq 0$.

Denumirea de *ecuație (sistem) perturbată* a ecuației (4.1.4) este justificată de considerarea ecuației (4.1.4) ca provenind din ecuația (4.1.3) la care s-a adăugat *funcția perturbatoare* $\mathbf{b}(.,.)$.

Teorema 4.3. *Fie* $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathfrak{R})$, $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{b}(.,.) : D = \mathfrak{R}_+ \times \Omega \to \mathfrak{R}^n$ *o funcție continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument,* $\mathbf{b}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, *care definesc ecuația* (4.1.4).

Dacă există $M \geq 1$, $L > 0$ şi $\omega > 0$ *astfel încât*

$$\|\exp(t, \mathbf{A})\| \leq M.\mathrm{e}^{-\omega t}, \qquad \forall t \geq 0,$$

$$\|\mathbf{b}(t, \mathbf{x})\| \leq L\|\mathbf{x}\|, \qquad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathfrak{R}_+ \times \Omega$$

$$LM - \omega < 0,$$

atunci soluția nulă a ecuației (4.1.4) *este asimptotic stabilă.*

4.2. STABILITATEA LIAPUNOV. FUNCȚIA LIAPUNOV

Definiția 4.2. O formă pătratică $V : \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \;,\; a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, ..., n \quad , \quad x = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \tag{4.2.1}$$

se numeşte *pozitiv definită* dacă

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n, \quad x \neq 0.$$

Propoziția 4.1. *Forma pătratică* (4.2.1) *este pozitiv definită dacă şi numai dacă există m* > 0, *M* > 0 *astfel încât*

$$m\|\mathbf{x}\|^2 \le V(\mathbf{x}) \le M\|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Re^n .$$

Fie Ω o vecinătate deschisă a originii în $\Re^n$ şi $f : \Re_+ \times \Omega \to \Re^n$ o funcție continuă pe $\Re_+ \times \Omega$ şi local lipschitziană pe Ω cu $f(t, \mathbf{0}) = 0 \quad \forall\, t \in \Re_+$.

Definiția 4.3. Funcția $V : \Re_+ \times \Omega \to \Re_+$ se numeşte *pozitiv definită* pe $\Re_+ \times \Omega$ dacă există o funcție $\omega : \Re_+ \to \Re_+$ continuă, crescătoare, cu $\omega(r) = 0$ dacă şi numai dacă $r = 0$, astfel încât

$$V(t,x) \ge \omega(\|x\|), \quad \forall (t,\mathbf{x}) \in \Re_+ \times \Omega$$

Definiția 4.4. Funcția $V : \Re_+ \times \Omega \to \Re_+$ se numeşte *funcție Liapunov* pentru ecuația (4.1.1) dacă:

a) V este de clasă C^1 pe $\Re_+ \times \Omega$ şi $V(t, 0) = 0$, $\forall t \in \Re_+$,

b) V este pozitiv definită pe $\Re_+ \times \Omega$,

c) $\dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x)\dfrac{\partial V}{\partial x_i}(t,x) \le 0, \qquad \forall (t, \mathbf{x}) \in \Re_+ \times \Omega.$

Teorema 4.4. *Dacă ecuația* (4.1.1) *admite o funcție Liapunov atunci soluția sa identic nulă este (simplu) stabilă.*

Observația 4.5. Dacă funcția Liapunov din teorema 4.4 are proprietăți suplimentare, atunci se obțin rezultate similare teoremei 4.4 pentru celelalte tipuri de stabilitate.

Dacă sistemul (4.1.1) este autonom (**f** nu depinde in mod explicit de *t*); mai precis dacă se consideră sistemul diferențial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{4.2.2}$$

unde $\mathbf{f} : \Omega \to \Re^n$, putem căuta funcția Liapunov independentă de variabila *t*.

Propoziția 4.2. *Dacă* $V : \Omega \to R$ *este continuă pe* Ω, $V(0) = 0$ *şi* $V(x) > 0$, $\forall$ **x** $\in \Omega$, **x** $\neq$ **0** *atunci există o vecinătate a originii* $\Omega_0 \subset \Omega$ *astfel încât V să fie pozitiv definită pe* Ω_0 .

Corolarul 4.1. *Dacă* $V : \Omega \to \Re$ *satisface*

a) V este de clasă C^1 *pe* Ω *şi* $V(\mathbf{0}) = 0$,

b) $V(\mathbf{x}) > 0$, $\forall x \in \Omega$, $x \neq 0$,

c) $\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \leq 0$, $\forall$ $\mathbf{x} \in \Omega$,

atunci există o vecinătate a originii $\Omega_0 \subset \Omega$ *astfel încât V să fie o funcție Liapunov pentru ecuația autonomă* (4.2.2) *pe* Ω_0.

Definiția 4.5. Fie $\Omega \subset R^n$ o mulțime deschisă, $0 \in \Omega$ şi $f : \Omega \to \Re^n$ o funcție de clasă C^1. Considerăm sistemul (4.2.2) şi definim **A** = **f**'(**0**).

Sistemul liniar

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

se numeşte *liniarizarea* sistemului (4.2.2) sau *prima aproximare* a acestuia.

Teorema 4.5. *În condițiile definiției 4.5, fie f de clasă* C^2, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *şi presupunem că* **A** = **f**'(**0**) *este matrice hurwitziană.*

Atunci soluția banală a sistemului (4.2.2) *este asimptotic stabilă.*

4.3. SISTEME DINAMICE AUTONOME

Definiția 4.6. Fie $\Omega \subset R^n$ o mulțime deschisă. Se numeşte *sistem dinamic* în Ω o funcție de clasă C^1, $\mathbf{G} : \Re \times \Omega \to \Omega$ cu proprietățile

a) $\mathbf{G}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall$ $\mathbf{x} \in \Omega$

b) $\mathbf{G}(t, \mathbf{G}(s, \mathbf{x})) = \mathbf{G}(t + s, \mathbf{x})$, $\forall$ $t, s \in \Re$, $\forall$ $\mathbf{x} \in \Omega$

Definiția 4.7. Mulțimea $\{\mathbf{G}(t,\mathbf{x}_0):\ t\in\Re\}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se numeşte *orbita* sistemului dinamic prin $\mathbf{x}_0$. Ω se numeşte *spațiul stărilor* sau *spațiul fazelor*.

Observația 4.6. Legătura cu ecuațiile diferențiale se obține observând că dacă definim pentru $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}(0,\mathbf{x})$$

(în ipoteza implicită a existenței derivatei), atunci

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}(t_0,\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{G}(s+t_0,\mathbf{x}_0)\right]\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{G}(s,G(t_0,\mathbf{x}_0))\right]\Big|_{s=0} = \mathbf{f}\left(\mathbf{G}(t_0,x_0)\right).$$

Aşadar, dacă $\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(t, x_0)$ vom avea

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Definiția 4.8. Fie U_1, $U_2 \subset \Re^n$ mulțimi deschise. Sistemul dinamic $\mathbf{G}_1$ din U_1 se numeşte *topologic echivalent* cu sistemul dinamic $\mathbf{G}_2$ din U_2 dacă există un homeomorfism (adică o funcție continuă, bijectivă cu inversa continuă) $\mathbf{h} : \Re^n \to \Re^n$ cu $\mathbf{h}(U_1) = U_2$ astfel încât orbitele lui $\mathbf{G}_1$ sunt aplicate pe orbitele lui $\mathbf{G}_2$ păstrând direcția timpului. În această situație se spune că şi traiectoriile lui $\mathbf{G}_1$ şi $\mathbf{G}_2$ sunt topologic echivalente.

Definiția 4.9. Sistemul dinamic autonom parametrizat definit de

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in \Re^n, \quad \mu \in \Re^m \tag{4.3.1}$$

se numeşte *topologic echivalent* în $U_\mu \subset \Re^n$ cu sistemul dinamic autonom parametrizat definit în U_η de

$$\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x},\eta), \quad \mathbf{x} \in \Re^n, \quad \eta \in \Re^m \tag{4.3.2}$$

dacă

a) există un homeomorfism în spațiul parametrilor $\mathbf{x} : \Re^m \to \Re^m$ cu $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$

b) $\forall\mu$ există $\mathbf{h}_\mu : \Re^n \to \Re^n$ homeomorfism cu $\mathbf{h}_\mu(U_\mu) = \mathbf{V}_{\mathbf{x}(\mu)}$, $\mathbf{h}_\mu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ şi care duce orbitele din U_μ ale sistemului (4.3.1) pe orbite din $V_{\mathbf{x}(\mu)}$ ale sistemului (4.3.2) cu $\eta = \mathbf{x}(\mu)$, păstrând direcția timpului.

Definiția 4.10. Fie

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mu)$$

un sistem dinamic autonom depinzând de parametrul $\mu\in\Re$. Apariția, prin variația parametrului a unor tablouri de fază care nu sunt topologic echivalente se numeşte *bifurcație.*

4.4. COMPORTAMENT PE TERMEN LUNG AL SOLUȚIILOR

Definiția 4.11. O soluție periodică izolată a sistemului (4.2.1) se numeşte *ciclu limită.*

Prin soluție periodică se înțelege că există $T > 0$ astfel încât $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$, pentru orice $t \in \Re$.

Proprietatea lui $\mathbf{x}(.)$ de a fi soluție izolată semnifică faptul că există $r > 0$ astfel încât pentru orice $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ cu $d(\mathbf{x}_0, \{\mathbf{x}(t);\ t \in \Re\}) < r$, soluția $\mathbf{x}(., t_0, \mathbf{x}_0)$ nu este periodică.

Definiția 4.12. Considerăm sistemul (4.2.1). Se numesc *puncte critice* sau *puncte singulare* sau *puncte de echilibru* punctele $\mathbf{x} \in \Re^n$ care verifică ecuația $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Definiția 4.13. Considerăm sistemul (4.2.1) şi fie $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ un punct critic al său.

a) $\mathbf{x}_0$ se numeşte *punct de atracție pozitiv invariant* dacă există o vecinătate U a lui $\mathbf{x}_0$ astfel încât dacă $\mathbf{x}(.)$ este o soluție care verifică $\mathbf{x}(t_0) \in U$ atunci $\mathbf{x}(t) \in U$ pentru orice $t \geq t_0$ şi $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.

b) $\mathbf{x}_0$ se numeşte *punct de atracție negativ invariant* dacă există o vecinătate U a lui $\mathbf{x}_0$ astfel încât dacă $\mathbf{x}(.)$ este o soluție care verifică $\mathbf{x}(t_0) \in U$ atunci $\mathbf{x}(t) \in U$ pentru orice $t \leq t_0$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.

Teorema 4.6. *Fie* $\mathbf{f} : \Re^n \to \Re^n$ *care defineşte sistemul* (4.2.1) *o funcție de clasă* C^2 ş*i fie* $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ *un punct critic al lui* (4.2.1).

Dacă $\mathbf{x}_0$ *este un punct de atracție pozitiv invariant (respectiv, negativ invariant) pentru liniarizarea sistemului* (4.2.1), *atunci* $\mathbf{x}_0$ *este un punct de atracție pozitiv invariant (respectiv, negativ invariant) pentru sistemul* (4.2.1).

În plus, toate soluțiile care iau într-un t_0 *arbitrar o valoare suficient de apropiată de* $\mathbf{x}_0$ *tind exponențial la* $\mathbf{x}_0$ *pentru* $t \to \infty$ *(respectiv, pentru* $t \to -\infty$*).*

Teorema 4.7. *Dacă sistemul* (4.2.1) *admite o funcție Liapunov într-o vecinătate a unui punct critic, atunci punctul critic este punct de atracție pozitiv invariant.*

4.5. APLICAȚII ÎN MECANICĂ, FIZICĂ ŞI INGINERIE

Aplicația 4.5.1. Stabilitatea echilibrului pentru pendul (A. Cernea**)**

Considerăm problema oscilațiilor unui pendul de lungime l care se mişcă fără frecare sub influența gravitației. Să notăm cu $d(t)$ spațiul parcurs de extremitatea liberă a pendulului la momentul t şi cu $x(t)$ unghiul (măsurat în radiani) făcut de pendul cu axa verticală la momentul t; avem $d(t) = lx(t)$. Forța care acționează asupra pendulului este $F = mg$, unde m este masa punctului material, iar g este accelerația gravitațională. Această forță se descompune după două componente: una având direcția firului şi care este anulată de rezistența firului şi alta având direcția tangentei la arcul de cerc descris de capătul pendulului. Din legea a doua a lui Newton ecuația diferențială a mişcării este

$$mlx'' = -\, mg\sin x,$$

sau, echivalent,

$$x''+\frac{g}{l}\sin x=0. \tag{4.5.1}$$

Dacă se studiază doar oscilațiile mici, atunci sin$x$ se aproximează prin x şi obținem ecuația oscilațiilor mici ale pendulului

$$x''+\frac{g}{l}x=0,$$

care este o ecuație de ordinul al doilea liniară, cu soluția generală (vezi § 2.4)

$$x(t)=c_1\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t+c_2\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t, \qquad t\in\Re,\ c_1, c_2\in\Re$$

Studiem stabilitatea punctelor de echilibru $\bar{x}_1(t)=0,\ \forall t\geq 0$ şi $\bar{x}_2(t)=\pi\quad \forall t\geq 0$ (deoarece t are semnificația de timp, vom lua $t \geq 0$).

Arătăm că $\bar{x}_1$ este (simplu) stabil, iar $\bar{x}_2$ este instabil.

Prin înmulțire cu x', egalitatea (4.5.1) devine

$$\frac{l}{g}x'x''+x'\sin x=0$$

care conduce, prin integrare pe $[0, t]$, la

$$\frac{l}{g}(x'(t))^2-2\cos(x(t))=\frac{l}{g}(x'(0))^2-2\cos(x(0)) \tag{4.5.2}$$

Dacă

$$|x'(0)|+|x(0)|<\delta$$

atunci

$$(x'(t))^2\leq\frac{2g}{l}(\cos(x(t))-1)+\frac{2g}{l}(1-\cos\delta)+\delta^2$$

sau

$$(x'(t))^2+\frac{4g}{l}\sin^2\frac{x(t)}{2}\leq\frac{4g}{l}\sin^2\frac{\delta}{2}+\delta^2\leq\varepsilon^2,\ \ \forall\delta\leq\delta_\varepsilon,$$

de unde rezultă stabilitatea soluției banale.

Studiul stabilității soluției $\overline{x}_2(t)=\pi$ îl reducem la studiul stabilității soluției banale pentru o altă ecuație.

Fie $y = x - \pi$, deci $x = y + \pi$. Din (4.5.1) rezultă

$$\frac{l}{g}y''-\sin y = 0 \tag{4.5.3}$$

Procedând ca mai înainte obținem din (4.5.3) că

$$\frac{l}{g}(y'(t))^2+2\cos(y(t))=\frac{l}{g}(y'(0))^2+2\cos(y(0)) \quad \forall t\geq 0\ . \tag{4.5.4}$$

Fie $\delta \in (0,1)$

$$y(0)=2\arcsin\frac{\delta}{2}, \qquad y'(0)=\delta\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{4.5.5}$$

Din (4.5.4) obținem

$$\frac{l}{g}(y'(t))^2+2\cos(y(t))=2$$

de unde pentru $y > 0$, $y' > 0$ deducem ecuația

$$y' = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\frac{y}{2}$$

a cărei soluție este

$$y(t)=2\arccos\left(\frac{ce^{-2t\sqrt{\frac{g}{l}}}-1}{ce^{-2t\sqrt{\frac{g}{l}}}+1}\right),$$

unde, ținând cont de (4.5.5)

$$c=\frac{1+\sqrt{1-\frac{\delta^2}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{\delta^2}{4}}}$$

Se observă că $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 2\pi$ şi atunci, oricât de mic ar fi $\delta \in (0, 1)$ nu putem avea, de exemplu,

$$|y(t)| \le 2, \qquad \forall t \ge 0,$$

deci soluția banală a lui (4.5.3) este instabilă, adică punctul de echilibru $x = \pi$ al lui (4.5.1) este instabil.

În continuare, considerăm sistemul canonic asociat ecuației (4.5.1)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\dfrac{g}{l}\sin x \end{cases}$$

şi fie

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}\int_0^x \sin t dt = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x),$$

definită pentru $|x| \le \dfrac{\pi}{2}$ şi $y \in \Re$.

Atunci

$$V(0, 0) = 0,\ V(x, y) > 0,\ \ \forall (x, y) \ne (0, 0),\ \ \|(x, y)\| < \frac{\pi}{2},$$

şi

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y)y + \frac{\partial V}{\partial x}(x, y)\left(-\frac{g}{l}\sin x\right) = 0.$$

Pe baza teoremei lui Liapunov (teorema 4.4) regăsim afirmația demonstrată anterior că punctul de echilibru $x = 0$, $y = 0$ este stabil.

În cazul în care în modelul considerat mişcarea prezintă şi frecare, ecuația este în acest caz de forma

$$x'' + bx' + \sin x = 0 \ \text{ cu } \ b > 0.$$

Sistemul liniar asociat este

$$\begin{cases} y' = y \\ y' = -x - by \end{cases}$$

Matricea corespunzătoare

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix}$$

are valorile proprii

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2}$$

deci Re(λ_1) < 0 şi Re(λ2) < 0 şi soluția $x = 0$ este uniform asimptotic stabilă.

Notăm că nu se putea utiliza teorema de stabilitate în prima aproximare (teorema 4.2.2), deoarece pentru sistemul liniarizat, în cazul pendulului fără frecare

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cu valoriile proprii $\mathrm{i}, -\mathrm{i}$, deci **A** nu este hurwitziană.

Aplicația 4.5.2 (A. Cernea)

Considerăm o particulă de masă m în câmpul de forțe conservativ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathrm{grad}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$.

Ecuația mişcării dată de legea lui Newton este $m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, care conduce la sistemul canonic asociat

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{v} \\ m\mathbf{v}' = -\mathrm{grad}(\mathbf{G}(\mathbf{x})). \end{cases} \tag{4.5.6}$$

Fie $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})$ un punct de echilibru. Atunci $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ şi grad($\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}})$) = **0**. Stabilitatea lui ($\bar{\mathbf{x}}$, **0**) este echivalentă cu cea a soluției banale pentru sistemul

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' = -\dfrac{1}{m}\mathrm{grad}(G(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}})) \end{cases} \tag{4.5.7}$$

Fie

$$E(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}mv^2 + G(\mathbf{x})$$

energia totală a sistemului (4.5.6) şi definim

$$V(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}mv^2 + G(\mathbf{x}+\overline{\mathbf{x}}) - G(\overline{\mathbf{x}})$$

Evident $V(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$,

$$\mathbf{v}(\text{grad}(G(\mathbf{x}+\overline{\mathbf{x}}))) + m\mathbf{v}\left[-\frac{1}{m}\text{grad}(G(\mathbf{x}+\overline{\mathbf{x}}))\right] = 0$$

şi dacă $\overline{\mathbf{x}}$ este punct de minim local izolat pentru G rezultă că $V(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$ pentru $(\mathbf{x},\mathbf{v}) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0})$ şi $\mathbf{x}$ intr-o vecinătate a lui $\mathbf{0}$.

Se obține, aşadar, că $(\mathbf{0}, 0)$ este punct de echilibru stabil pentru (4.5.7), adică $(\overline{\mathbf{x}},\mathbf{0})$ este punct de echilibru stabil pentru (4.5.6).

Acest rezultat este cunoscut ca *Principiul (Teorema) lui Lagrange*: Un punct de echilibru $(\overline{\mathbf{x}},\mathbf{0})$ al unui sistem conservativ pentru care energia potențială are un minim local izolat în $\overline{\mathbf{x}}$ este stabil.

Aplicația 4.5.3 (A. Cernea)

Considerăm un circuit electric format dintr-o rezistență R, o inductanță L şi un condensator C.

Notăm cu $i(t) = (i_R(t), i_L(t), i_C(t))$ starea curentului din circuit la momentul t, unde i_R, i_L, i_C reprezintă curenții din porțiunile de circuit care conțin rezistență R, inductanță L şi respectiv condensatorul C.

Analog, fie $v(t) = (v_R(t), v_L(t), v_C(t))$ starea tensiunilor din circuit la momentul t. Din legile lui Kirchhoff se deduce

$$i_R(t) = i_L(t) = -i_C(t), \qquad v_R(t) + v_L(t) - v_C(t) = 0,$$

iar din legea lui Ohm generalizată

$$g(i_R(t)) = v_R(t)$$

pentru $t \geq 0$. Din legea lui Faraday se obține

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = v_L \\ C\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = i_C \end{cases}$$

pentru $t \geq 0$, unde $L > 0$ şi $C > 0$ sunt inductanța bobinei L şi, respectiv, capacitatea condensatorului C. Din aceste relații se găseşte că i_L şi v_C satisfac sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = v_C - g(i_L), \\ C\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = -i_L, \end{cases}$$

pentru $t \geq 0$.

Pentru simplitate presupunem $L = 1$, $C = 1$. Notăm $x = i_L$ şi $y = v_C$.

Atunci sistemul anterior se scrie sub forma

$$\begin{cases} x' = y - g(x), \\ y' = -x, \end{cases} \tag{4.5.8}$$

pentru $t \geq 0$.

În plus, presupunând suplimentar că g este de clasă C^1, derivând prima ecuație membru cu membru şi utilizând-o pe cea de a doua pentru a-l elimina pe y, găsim

$$x'' + g'(x)x' + x = 0, \tag{4.5.9}$$

pentru $t \geq 0$. Ecuația (4.5.9) este *ecuația lui Liénard*.

În cazul în care $g(x) = x^3 - x$, $x \in \Re$, ecuația devine

$$x'' + (3x^2 - 1)x' + x = 0$$

pentru $t \geq 0$ şi poartă numele de *ecuația lui Van Der Pol*.

Notăm

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi

$$\mathbf{b}(t,(x,y)) = \begin{pmatrix} -g(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Evident **A** nu este hurwitziană şi, deci, teorema 4.1.2 nu se poate aplica.

În schimb, dacă definim funcția

$$\mathbf{f}((x,y)) = \begin{pmatrix} y - g(x) \\ -x \end{pmatrix},$$

aceasta are liniarizarea în (0, 0)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -g'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cum această matrice este hurwitziană dacă $g'(0) > 0$, din teorema 4.2.2 rezultă că în acest caz ($g'(0) > 0$) soluția nulă a sistemului de mai sus este asimptotic stabilă.

Ca o consecință a acestui rezultat deducem că soluția nulă a ecuației Van Der Pol ($g(x) = x - x^3$) este asimptotic stabilă.

Considerăm, în continuare, o formă mai generală a ecuației Liėnard

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \qquad (4.5.10)$$

cu $f(x) > 0$ şi $xg(x) > 0$ $\forall x \neq 0$.

Ecuația (4.5.10) modelează mişcarea unui oscilator armonic cu frecare.

Condiția $f(x) > 0$ spune că frecarea este pozitivă, iar condiția $xg(x) > 0$ indică o forță de revenire.

Sistemul canonic asociat este

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x)y - g(x). \end{cases} \tag{4.5.11}$$

Originea este singurul punct critic.

Fie

$$G(x) = \int_0^x g(u)\mathrm{d}u \quad \text{şi} \qquad V(x,y) = \frac{y^2}{2} + G(x).$$

Este uşor de văzut că V are un minim în (0, 0). Pe de altă parte

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)y + \frac{\partial V}{\partial x}(x,y)(-f(x)y - g(x)) = -y^2 f(x) \leq 0$$

În plus, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(x(t)))$ nu se anulează decât în puncte izolate şi V este strict descrescătoare pe soluțiile sistemului (4.5.11).

Aplicând teorema 4.7, găsim că originea este punct de atracție pozitiv invariant.

Aplicația 4.5.4. **Stabilitatea echilibrului pentru oscilații liniare** (D. Comănescu, I. Caşu)

Modelarea matematică a fenomenelor fizice care conduc la oscilații liniare a fost prezentată în aplicația "Oscilații liniare" de la capitolul 2.

1. Oscilații libere

Modelul matematic al mişcărilor liniare este:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0.$$

Prin notația $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ din ecuația diferențială de ordinul al II-lea se obține sistemul diferențial echivalent de ordinul I cu necunoscutele x_1, x_2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \cdot x_1 \end{cases}.$$

Se observă că unicul punct de echilibru al sistemului este $(0,0)$. Stabilitatea acestui punct de echilibru se face prin metoda directă a lui Liapunov utilizând funcția Liapunov

$$L(x_1,x_2)=\omega^2\cdot x_1^2+x_2^2.$$

Pentru a demonstra că funcția anterioară este funcție Liapunov se observă că $(0,0)$ este punct de minim absolut strict şi că funcția este lege de conservare (se conservă de-a lungul soluțiilor sistemului).

2. Oscilații amortizate

Modelul matematic al mişcărilor liniare este:

$$m\cdot\ddot{x}+\mu\cdot\dot{x}+k\cdot x=0.$$

Prin notația $x_1=x,\ x_2=\dot{x}$ din ecuația diferențială de ordinul al II-lea se obține sistemul diferențial echivalent de ordinul I cu necunoscutele x_1,x_2:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\omega^2\cdot x_1-\dfrac{\mu}{m}\cdot x_2\end{cases}.$$

Unicul punct de echilibru al sistemului este $(0,0)$. Stabilitatea se demonstrează utilizând funcția Liapunov

$$L(x_1,x_2)=\omega^2\cdot x_1^2+x_2^2.$$

Pentru a demonstra că funcția anterioară este funcție Liapunov se observă că $(0,0)$ este punct de minim absolut strict. Derivata în virtutea sistemului a funcției este:

$$\frac{d}{dt}L(x_1(t),x_2(t))=\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1(t),x_2(t))\cdot\dot{x}_1(t)+\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1(t),x_2(t))\cdot\dot{x}_2(t)=-\frac{2\cdot\mu}{m}\cdot x_2^2\leq 0.$$

Urmărind expresiile soluțiilor (a se vedea aplicația "Oscilații liniare") constatăm că toate soluțiile tind spre punctul de echilibru când $t\to\infty$ ceea ce demonstrează că punctul de echilibru este asimptotic stabil.

3. Oscilații liniare neamortizate în câmp gravitațional

Modelul matematic al mişcărilor liniare este:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = m \cdot g .$$

Prin notația $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ din ecuația diferențială de ordinul al II-lea se obține sistemul diferențial echivalent de ordinul I cu necunoscutele x_1, x_2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \cdot x_1 + g \end{cases} .$$

Unicul punct de echilibru al sistemului este $(\frac{g}{\omega^2}, 0)$. Stabilitatea acestui punct de echilibru se demonstrează cu ajutorul funcției $L(x_1, x_2) = \omega^2 \cdot x_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot g \cdot x_1 + \frac{g^2}{\omega^2}$. Se observă uşor că $L(\frac{g}{\omega^2}, 0) = 0$ şi că punctul de echilibru este punct de minim absolut strict pentru *L*. Derivata în virtutea sistemului a funcției este:

$$\frac{d}{dt} L(x_1(t), x_2(t)) = \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) \cdot \dot{x}_1(t) + \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t)) \cdot \dot{x}_2(t) =$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial L}{\partial x_2} \cdot (-\omega^2 \cdot x_1 + g) = (2 \cdot \omega^2 \cdot x_1 - 2 \cdot g) \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 \cdot (-\omega^2 \cdot x_1 + g) = 0 ,$$

ceea ce demonstrează că *L* este lege de conservare. În consecință *L* este funcție Liapunov.

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE

1. ARNOLD, V.I. *Metodele matematice ale mecanicii clasice*. Bucureşti: Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, 1980.
2. BLANCHARD, P., DEVANEY, R.L., HALL, G.R., *Differential equations*, Third Edition, Thomson Brooks/Cole, 2006.
3. BRAUN, M., *Differential equations and their applications*. 3rd Edition, Springer-Verlag, 1983.
4. BUZDUGAN, Gh. *Rezistența materialelor*. Bucureşti: Editura Tehnică, 1980.
5. CIORĂNESCU, N., *Curs de Algebră şi Analiză Matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.
6. COMĂNESCU, D., *Metode matemtice în mecanică*, Ed. Mirton, Timişoara, 2007.
7. CRAW, I., *Advanced Calculus and Analysis*, Univ. of Aberdeen, 2000.
8. CREȚU, Tr. *Fizică generală, vol. I*. Bucureşti: Editura Tehnică, 1984.
9. DRAGOŞ, L., *Principiile mecanicii analitice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1976.
10. ENGEL, J.H., *A verification of Lanchester's law*, Operations Research, 2, pp. 163-171 (1954).
11. FIHTENHOLȚ, G.M., *Curs de Calcul Diferențial şi Integral*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1964.
12. HIRSCH, M. W., SMALE, S. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
13. KITTEL, CH., KNIGHT, W.D., RUDERMAN, M.A. *Cursul de fizică Berkeley, vol. I*. Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 1981.
14. LANDAU, L.D., LIFŞIȚ, E.M. *Mecanica*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1966.
15. LUNGU, N. *Matematici cu aplicații tehnice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1990.
16. MIRICĂ, Şt., *Ecuații diferențiale şi integrale I*, Ed. Univ. Bucureşti, 1999.
17. POPESCU, E., *Equations différentielles et aux dérivées partielles*, Editura Conspress, Bucureşti, 2011.
18. PUTA, M., CHIRICI, S., COMĂNESCU, D., *Elemente de mecanică hamiltoniană*, Ed. Mirton, Timişoara, 2001.

19. SOARE, M.V., TEODORESCU, P.P., TOMA, I., *Ecuații diferențiale cu aplicații în mecanica construcțiilor*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1999.
20. SOARE, M.V., TEODORESCU, P.P., TOMA, I., *Ordinary differential equations with applications to mechanics*, Springer, Dordrecht, 2006.
21. STRANG, G., *Calculus*, Wellesley College, 1991.
22. ŞABAC, I.Gh., *Matematici speciale, vol. I*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981.
23. TOMA, I., MOŞNEGUȚU, V. *Analiza matematică. Ecuații diferențiale ordinare. Calcul integral*, Editura Conspress, Bucureşti, 2010.
24. TOMA, I., *Matematici Speciale*, Matrix Rom, Bucureşti, 2000.
25. http://www.sosmath.com/diffeq/diffeq.html
26. http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/euler/index.php
27. http://cermics.enpc.fr/~lelievre/MOPSI/MOPSI_EDO.pdf
28. http://www.lpp.fr/IMG/pdf_EquaDiffS4.pdf